# Fonction dérivée

## 1 Calcul de quelques dérivées :

### 1.1 dérivée de y=x

soit la fonction y=f(x) =x

calculons sa dérivée

$$y' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}$$

Arrivé à ce stade du calcul il y a deux façons d'opérer: la bonne et la mauvaise.

Voyons tout d'abord la mauvaise: elle consite à faire tendre tout de suite $x$ vers $x_0$ ce qui revient à annuler le numérateur ET le dénominateur simultanément. On se retrouve alors avec la fraction $\frac{0}{0}$ qui n'est pas calculable (on l'appelle d'ailleurs indéterminée). En effet quel que soit $a$ ,$\frac{0}{a}$ est égal à 0, alors que, d'autre part, quel que soit a, $\frac{a}{0}$ n'est pas calculable sachant toutefois que lorsque le dénominateur d'une fraction tend vers 0, le résultat tend vers $+\infty$ (l'infini). Entre 0 et $+\infty$ il y a de la marge, il y a en fait la place pour n'importe quelle valeur réelle.

Voyons maintenant la bonne façon de procéder, (qu'il faudra TOUJOURS appliquer) : Elle consite à remarquer que la même valeur $(x - x_0)$ se retrouve au numérateur et au dénominateur. On peut donc tout à fait simplifier par cette valeur, (on divise le numérateur et le dénominateur par cette valeur NON NULLE $(x - x_0)$ , non nulle tant qu'on consière $x \neq x_0$ ) et on obtient pour résultat:

$$y' = \lim_{x \to x_0} (1)$$

Et la limite de 1 lorsque $x \to x_0$ c'est... 1 quel que soit $x_0$.

On écrira:

$x' = 1$

Nous obtenons donc comme fonction dérivé de la fonction $f(x) = x$ qui pour tout $x$ renvoit sa propre valeur $x$, la fonction $f'(x) = 1$ qui pour tout $x$ renvoit la valeur 1. C'est une fonction constante. Elle indique que la pente de la courbe d'équation $y = x$ est contante ce qui n'est pas étonnant puisque la courbe en question (dans le plan affine rapporté à un repère orthonormé) est une droite (passant par 0).

Je suis entré dans les détails pour ce premier calcul, on va maintenant passer la seconde vitesse.

## 1.2 dérivée de $y = ax$

soit la fonction

$f(x) = y = ax$ avec a = nombre constant, réel.

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} a \\ &= a \end{aligned}$$

Et voilà. Au passage on va utiliser une notation pas très rigoureuse, mais pratique et généralement admise:

$(ax)' = a$

## 1.3 dérivée de $a\,f(x)$

(du produit d'une *fonction* par une constante)

$$
\begin{aligned}
y' = f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{a\,f(x) - a\,f\,(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{a\,(\,f(x) - f\,(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} a\,\frac{(\,f(x) - f\,(x_0))}{x - x_0} \\
&= a \times \lim_{x \to x_0} \frac{(\,f(x) - f\,(x_0))}{x - x_0} \\
&= a \times f'(x)
\end{aligned}
$$

$$[a\,f(x)]' = a\,f'(x)$$

Nous pouvons utiliser ce résultat pour retrouver la dérivée de $y = a\,x$ sachant que nous connaissons la dérivée de $y = x$ qui vaut 1.

la calcul est simple:

$(ax)' = ax' = a \times 1 = a$

## 1.4 dérivée du produit de deux fonctions de $x$

(à ne pas confondre avec le produit d'une fonction avec une constante comme vu plus haut).

soit $f(x) = u(x) \times v(x)$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \times v(x) - u(x_0) \times v(x_0)}{x - x_0}$$

astuce: ajoutons la quantité nulle -$\boldsymbol{u(x_0) \times v(x) + u(x_0) \times v(x)}$ au numérateur (ce qui ne change rien donc):

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) \times v(x) \boldsymbol{- u(x_0) \times v(x) + u(x_0) \times v(x)} - u(x_0) \times v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)\, v(x) \boldsymbol{- u(x_0)\, v(x) + u(x_0)\, v(x)} - u(x_0)\, v(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[ v(x) \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + u(x_0) \frac{\boldsymbol{v(x)} - v(x_0)}{x - x_0} \right]$$

$$= u'(x)\,.v(x) + u(x).v'(x)$$

Ce qui s'écrit:

$$[u(x) \times v(x)]' = u'(x) \,.\, v(x) + u(x) . v'(x)$$

C'est un résulat important qu'on appliquera souvent. A commencer par tout de suite!

## 1.5 dérivée d'une fonction composée

soit la fonction composée $f(x) = g\,(u(x))$ notée également $g \circ u$

comme par exemple $f(x) = \sin\,(x^2)$ dans laquelle $u(x) = x^2$ et $g(x) = \sin(x)$

Calculons le nommbre dérivé de la fonction $f$ au point $x = a$

Pour une bonne lisibilité des calculs nous utiliserons la notation suivante:

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Appliquons cette définition à notre fonction composée:

$$\mathrm{Ac} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{g(u(a+h)) - g(u(a))}{h}$$

Astuce: posons $k = u(a+h) - u(a)$ en remarquant que

$$\lim_{h \to 0} k = 0$$

ce qui donne $u(a+h)=u(a)$+k

reportons cette valeur dans le calcul de A

$$\mathrm{Ac} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{h}$$

multiplions numérateur et dénominateur par $\frac{k}{k}$

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{h}\times\frac{k}{k}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\times\frac{k}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\times\lim_{h\to 0}\frac{k}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(u(a)+k)-g(u(a))}{k}\times\lim_{h\to 0}\frac{u(a+h)-u(a)}{h} \\
&= g'(u(a))\times u'(a)
\end{aligned}$$

Ce résultat nous servira (entre autre) pour démontrer la propriété fondamentale de la fonction logarithme népérien qui consiste à remplacer des multiplications pas des additions.

### 1.6 dérivée de $y = x^2$

$(x^2)' = (x.x)' = x'.x + x.\,x' = 1 \times x + x \times 1 = x + x = 2x$

Ce qui s'écrit:

$$(x^2)' = 2x$$

Le calcul est simple sous cette forme n'est-ce pas? à comparer à ceci :

$$\begin{aligned}
y' = f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

On retrouve bien sûr le même résultat.

## 1.7 dérivée de $y = x^3$

$(x^3)' = (x.x^2)' = x'.x^2 + x.\,(x^2)' = x^2 + x \times 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$

Ce qui s'écrit:

$(x^3)' = 3x^2$

## 1.8 dérivée de $y = x^n$

$x^n = x \times x \times x \times x \times \ldots\ldots n\,\text{fois}$

$$\begin{aligned} x^n &= x \times x \times x \times x \times \ldots\ldots n\,\text{fois} \\ &= x\,.x^{n-1} \times x\,.x^{n-1} \times \ldots.\,n\,\text{fois} \end{aligned}$$

utilisons la dérivée d'un produit de fonctions:

$$\begin{aligned} (x^n)' &= x'\,.x^{n-1} + x'\,.x^{n-1} + \ldots.\,n\,\text{fois, avec}\ x' = 1 \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit:

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

exemple: la dérivée de $y = x^5$ est $y' = 5x^4$

C'est aussi un résultat trés important.

Récapitulons:

| $\mathrm{cy} = f(x)$ | $y' = f'(x)$ |
|---|---|
| $x$ | $1$ |
| $a x$ | $a$ |
| $x^2$ | 2$x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |
| $x^4$ | $4x^3$ |

## 1.9 Primitives de ces fonctions:

Ce n'est pas compliqué, il suffit de lire le tableau à l'envers

| | |
|---|---|
| $y=f(x)$ | $F(x)=\int f(x).dx$ |
| $1$ | $x+k$ |
| $a$ | $ax+k$ |
| $2x$ | $x^2+k$ |
| $3x^2$ | $x^3+k$ |
| $4x^3$ | $x^4+k$ |

Les $(+k)$ traduisent le fait que la dérivation de la constante $k$ (qui donne 0) ne change pas le résultat

puis en ajustant les constantes afin de trouver le résultat qui nous intéresse:

| | |
|---|---|
| $y=f(x)$ | $F(x)=\int f(x).dx$ |
| $1$ | $x+k$ |
| $a$ | $ax+k$ |
| $x$ | $x^2/2+k$ |
| $x^2$ | $x^3/3+k$ |
| $x^3$ | $x^4/4+k$ |

### 1.9.1 primitive de $x^n$

$$\int x^n.\mathrm{dx}=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k$$

AVEC $n\neq-1$

Ce n'est pas un parachutage, il sufffit de dériver $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ pour retouver $x^n$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}+k\right]' &= \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} \\ &= x^n \end{aligned}$$

**Remarque** : limite de cette formule :

On ne peut pas calculer la primitive de $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ par cette formule, on bute sur un zéro au dénominateur ce qui est interdit, est donne une limite au domaine d'application de la formule comme indiqué plus haut, $n \neq -1$

Mais d'autres valeurs négatives pour $n$ sont-elles permises ? Oui, tout à fait, par exemple

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} &= \int x^{-2}\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+k \\ &= \frac{1}{-1}x^{-1}+k \\ &= -\frac{1}{x}+k \end{aligned}$$

Autre exemple:

$$\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{dx} \;=\; \int x^{-3}\mathrm{dx} \;= -\frac{1}{2x^2} + k$$

Remarque: Aucune de ces fonctions $y = x^n$ , quel que soit n positif ou négatif différent de 1 ne donne $\frac{1}{x} = x^{-1}$ comme fonction dérivée. **Aucune n'est la primitive de $\frac{1}{x}$**

en effet si on fait n=0 dans la formule de la dérivation ci-dessous

$(x^n)' = n x^{n-1}$

on obtient bien -1 comme puissance, mais multipliée par 0

$0x^{-1} = 0 \times \frac{1}{x}$ ce qui ne fait visiblement pas $\frac{1}{x}$ mais 0.

Mais alors, que vaut la primitive de $\frac{1}{x}$ ? Ce n'est pas une puissance de $x$ . Il faut l'inventer ! (bien entendu d'autres l'ont fait avant nous).

On l'appellera la fonction **logarithme népérien**.

On posera *par définition*

$$\mathrm{Log}(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$$

et on ajoutera : celle qui s'annule pour $x = 1$ (oui parce que toute fonction semblable qui n'en diffère que par l'ajout d'une constante est également primitive de $x^{-1}$)

Alors, c'est pas beau les maths? L'imagination permet de contourner bien des obstacles.

On étudira cette fonction et sa réciproque l'exponentielle la prochaine fois.

**Note.** Historiquement la fonction logarithme était connue par ses propriétés (le remplacement des multiplications par des additions comme on le verra) avant d'être définie comme l'intégrale de 1/x. Voir ce lien :

**http://fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme_naturel**