Forme exponentielle des nombres complexes

PAR SILICIUM628

soit le nombre complexe

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho, \theta]$

écrivons le

$z = \rho\, e^{i\theta}$

où e est la fonction exponentielle de base e

1 Justification de cette écriture:

nous avons vu que $z_1 \times z_2 = [\rho_1, \theta_1] \times [\rho_2, \theta_2] = [\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$

or le produit sous la forme exponentielle donne:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\, e^{i\theta_1} \times \rho_2\, e^{i\theta_2} \\ &= \rho_1\rho_2\, e^{i\theta_1} \times \rho_2\, e^{i\theta_2} \\ &= \rho_1\rho_2\, e^{i\theta_1 + i\theta_2} \\ &= \rho_1\rho_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

ce qui est bien la représentation exponentielle de $[\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$

En outre , on a:

$[1, 0] = 1$

de même $1\, e^{i\times 0} = 1\, e^0 = 1 \times 0 = 1$

Ces propriétés justifient la notation :

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

c'est la « Formule d'Euler »

En électronique, on utilisera le plus souvent les nombres complexes sous cette forme exponentielle.

Note 1. En électronique on désigne le nombre imaginaire i par la lettre j pour ne pas confondre avec le i de l'intensité (le nombre d'ampères)

2 Ecriture du sinus et du cosinus sous forme complexe

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

additionnons membre à menbre :

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$$

et en soustrayant membre à membre :

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

ce qui donne :

$$\boldsymbol{\sin x \;=\; \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

2.1 Cosinus hyperbolique

Je ne résiste pas à l'idée de vous parler ici du cosinus hyperbolique dont la définition est très proche :

$$\cosh x \;=\; \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

et dont la courbe représentative est la *chaînette* (c'est la forme que prend un câble suspendu entre deux poteaux). La démonstration de ceci n'est pas toute simple, comme quoi les câbles sont très doués en math :D

Nous retrouverons ces cosinus hyperboliques lors de l'étude de la Transformation de Lorentz appliquée à la relativité restreinte.

...ainsi que le sinus hyperbolique :

$$\sinh \;=\; \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

2.1.1 remarque

$\cosh(ix) = \cos x$

3 Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

Une tension sinusoïdale u , de pulsation $\omega = 2\pi f$, d'amplitude U et de phase φ

s'écrira: $u = U\cos(\omega t + \varphi)$

c'est une valeur réelle, sera associée à la valeur complexe :

$\underset{\sim}{U} = U(\cos(\omega t + \varphi) + j\sin(\omega t + \varphi))$

ou, sous sa forme exponentielle :

$\underline{U} = Ue^{j(\omega t+\varphi)}$

Il ne faudra pas perdre de vue que le signal sinusoïdal traité ne constitue que la partie réelle de ce nombre complexe.

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{R}e[\underline{U}] \\ &= \mathcal{R}e\big[\underline{Ue^{j(\omega t+\varphi)}}\big] \\ &= \mathcal{R}e[U(\cos(\omega t+\varphi) + j\sin(\omega t+\varphi))] \\ &= U\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}$$

Mais alors pourquoi se compliquer la vie en utilisant cette représentation complexe ? Parce que les calculs qui se feront dès lors sur cette valeur complexe se trouveront grandement simplifiés.

Note 2. On peut décomposer la valeur complexe en un produit de deux termes :

$$Ue^{j(\omega t+\varphi)} = U(e^{j\omega t})(e^{j\varphi})$$

Note 3. On représente les grandeurs (tension, intensité) constantes par des lettres majuscules et les grandeurs instantanées par des lettres minuscules.

Note 4. Par comodité d'écriture, on confondra souvent la notation complexe avec sa partie réelle, ainsi on rencontrera la notation $u = Ue^{j(\omega t+\varphi)}$, sans la notation $\mathcal{R}e$ devant. Elle est alors sous-entendue. Répétons ici qu'il ne faudra pas perdre de vue que le signal sinusoïdal traité ne constitue que la partie réelle de ce nombre complexe. Une fois les calculs faits sur les valeurs complexes, il suffira de reconsidérer la partie réelle du résultat afin de retouver LA valeur réelle.

Toutefois nous verrons ultérieurement qu'en physique quantique, les caractéristiques des particules se modélisent effectivement par des nombres complexes, et en faisant ainsi leurs propriétés qui parraissent mystérieuses lorsqu'on veut les représenter par des valeurs réelles ne le sont plus du point de vue mathématique. En particulier la « dualité onde-corpuscule ». Je cite Richard Feynman [DUNOD - ISBN 2 10 004934 8 page 8] : « En mécanique quantique il se trouve que les amplitudes *doivent* être représentées par des nombres complexes. Les parties réelles seules ne suffisent pas ».