Les nombres complexes (2)

1 Forme algébrique:

$z = a + ib$ avec: $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$

a est la partie *réelle*

ib est pa partie *imaginaire*

z est un nombre *complexe*

1 Autre notation:

$z = (a, b)$

2 Nombre complexe conjugué :

Le nombre complexe conjugué est noté $\bar{z}$ ou parfois z^*

Si $z = a + ib$, le conjugué de z a pour valeur :

$\bar{z} = a - ib$

Le conjugue a même partie réelle mais une partie imaginaire opposée.

3 Module

Le module d'un nombre complexe noté $|z|$ est la distance entre le point de coordonnées (a, b) et l'origine (dans le cas de la représention géométrique dans le plan complexe). C'est en quelque sorte la « longueur » du nombre complexe.

Il a pour valeur :

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Remarque :

$$\begin{aligned} z\,\bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 + iab - iab - i^2 b^2 \\ &= a^2 - i^2 b^2 \\ &= a^2 - (-1) b^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

4 Opérations:

4.1 Addition:

$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

on additionne donc séparément et respectivevent les parties réelles et imaginaires.

4.2 Multiplication

$z_1 \times z_2 = (a_1 + i b_1)(a_2 + i b_2) = a_1 a_2 + i b_1 a_2 + i b_2 a_1 + i^2 b_1 b_2$

ici on oublie pas que $i^2 = -1$ donc il faut remplacer $+i^2 b_1 b_2$ par $-b_1 b_2$

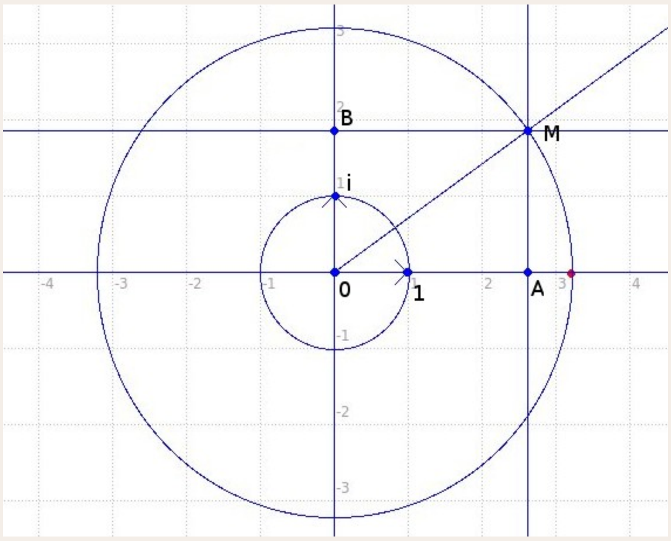
les calculs algébriques avec les nombres complexes se font donc comme avec les nombres réels à ceci près que lorsqu'on rencontre i^2 on le remplace par -1.

revenons à notre multiplication:

$z_1 \times z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + b_2 a_1)$

C'est un peu compliqué sous la forme algébrique, aussi on va s'interresser maintenant à la forme trigonométrique des nombres complexes.

5 Forme trigonométrique:



le nombre complexe z peut être représenté par un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

Remarque: $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

soit θ l'angle $\widehat{\mathrm{AOM}}$

soit $\rho = \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|$ = OM le module du vecteur (la «norme du vecteur » ou « longueur du segment OM »)

ρ et θ définissent complètement le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et donc le nombre complexe z

On écrira: $z = [\rho, \theta]$

ρ est appelé le module de z on le notera aussi $|z|$

θ est l'argument de z

Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle 0AM permettent d'écrire:

$\mathrm{OA} = \mathrm{OM} \cos\theta = \rho \cos\theta$

$\mathrm{OB} = \mathrm{OM} \sin\theta = \rho \sin\theta$

or nous avons vu que par définition OA représente la partie réelle de z et OB la partie imaginaire. Le nombre complexe z est la somme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

On peut donc écrire (sans oublier i qui caractérise la partie imaginaire):

$z = \rho \cos\theta + i \rho \sin\theta = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

mais on sait aussi que:

$z = a + ib$

on identifie les termes:

$a = \rho \cos\theta$

$b = \rho \sin\theta$

On obtient ainsi la relation qui lie parties réelle et imaginaire (de la notation algébrique) au module et à l'argument de la notation trigonométrique.

Dans l'autre sens, les relations trigonométriques dans le triangle rectangle 0AM nous montrent que:

$\rho^2 = a^2 + b^2$ (le carré de l'hypothénuse est égal...) et donc $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

quant à l'argument on a: $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

Sous la forme trigonométrique l'addition devient une somme vectorielle. Ce n'est pratique que si on travaille graphiquement, ce qui est parfois le cas. La multiplication en revanche devient plus simple que sous la forme algébrique. Nous verrons ça sur la page suivante.