L'ELECTROMAGNETISME

est une théorie relativiste

Nous avons longuement parlé du champ *électrique* qui règne aux alentours d'une charge électrique. Nous avons également parlé du champ *magnétique* à propos des ondes électromagnétiques, sans toutefois vraiment le définir. Voyons donc celà de plus près :

Le champ électrique a été défini comme ce qui provoque la force qui s'exerce entre deux charges électriques au repos. $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q \times q'}{r^2}$

Lorsque la charge n'est pas au repos, une autre force peut s'exercer sur elle, qui dépend de sa vitesse et de l'endroit où elle se trouve.

Ainsi chaque point de l'espace est caractérisé non seulement par un vecteur champ électrique $\vec{E}$ mais aussi par un vecteur champ magnétique $\vec{B}$, de telle manière que la force totale s'exerçant sur une charge s'écrit :

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (C'est la force de Lorentz)

Le premier terme $q\vec{E}$ nous est familier, c'est le produit de la charge par le vecteur champ électrique.

Le second terme $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ est plus compliqué : il fait intervenir la vitesse $\vec{v}$ de la particule sous la forme d'un produit vectoriel avec le vecteur champ magnétique $\vec{B}$. Cette composante magnétique de la force est donc normale (orthogonale) au vecteur vitesse ET au vecteur champ magnétique. Son intensité est proportionnelle à la vitesse de la particule, elle est donc nulle au repos.

Nous allons voir dans cet article que les champs électriques et magnétiques sont, au sens relativiste, des aspects du même phénomène.

1 Champ magnétique autour d'un fil parcouru par un courant

Nous allons nous intéresser à l'influence d'un courant électrique sur une charge ponctuelle en mouvement, c'est à dire à la force qui s'exerce sur cette charge qui se déplace parallèlement à un fil électrique rectiligne, de longueur infinie, parcouru par un courant.

La 4eme équation de Maxwell permet de calculer le champ magnétique créé par un par un courant :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\boldsymbol{E}} \tag{1}$$

avec :

$\vec{\boldsymbol{E}} \longrightarrow$ le champ électrique
$\vec{\boldsymbol{B}} \longrightarrow$ le champ magnétique
$\varepsilon_0 \longrightarrow$ un coefficient (la permittivité du vide)
$\vec{j} \longrightarrow$ le vecteur densité de courant électrique
$\vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \quad \longrightarrow$ rotationnel de $\vec{\boldsymbol{B}}$

Nous considérons que le fil électrique est parcouru par une courant électrique continu (constant) mais qu'il n'est pas chargé c'est à dire qu'il contient autant de charges élémentaires positives (protons dans les noyaux des atomes) que de charges élémentaires négatives (électrons), bien que certaines se déplacent (les électrons dans la bande de conduction) : Les atomes sont neutres.

Dès lors, le terme $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\boldsymbol{E}}$ est nul puisque $\boldsymbol{E} = 0$ (et ne varie pas dans le temps).

La formule (1) qui nous intéresse devient donc :

$$\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} \tag{2}$$

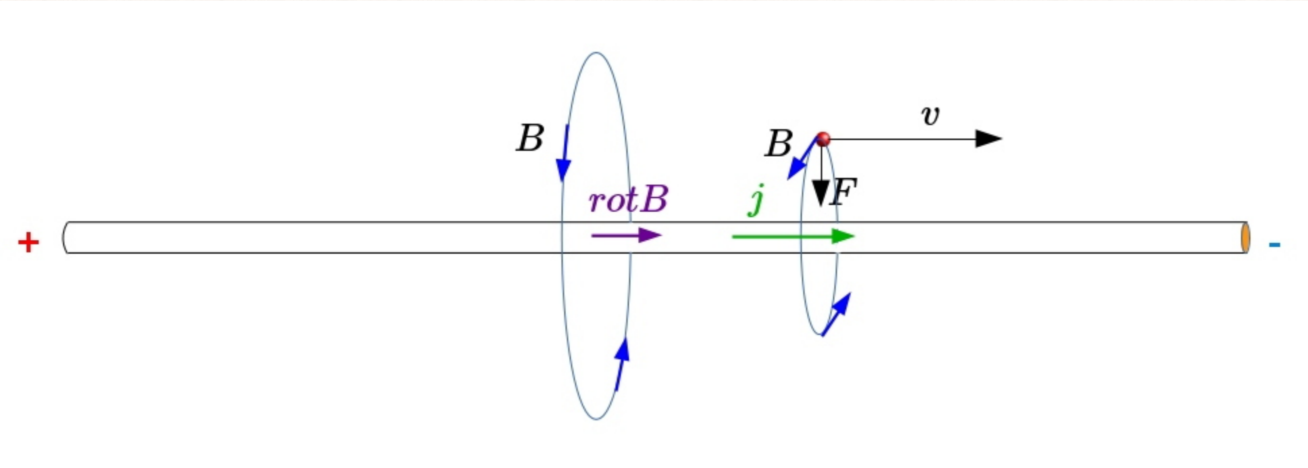
Le *rotationnel* de $\vec{\boldsymbol{B}}$ est proportionnel à la densité de courant électrique $\vec{j}$ c'est à dire que les vecteurs décrivant le champ magnétique « forment des boucles » dans l'espace autour du courant électrique. Ce sont ces boucles que l'on appelle les lignes de champ magnétique.

Rappel : Les lignes de champ d'un champ vectoriel sont des lignes imaginaires qui sont en tout point tangentes aux vecteurs.

Le vecteur $\vec{j}$ est orienté suivant le courant, c'est à dire suivant l'axe du fil.

Si l'on choisit judicieusement le repère, avec le fil orienté suivant l'axe x alors $\vec{j}$ n'a qu'une composante suivant z. D'après l'égalité (2), il doit en être de même pour le rotationnel $\operatorname{rot}\vec{\boldsymbol{B}}$.

Si l'on trace ce champ vectoriel V, il se présente comme un ensemble de vecteurs semblant « tourner » autour de l'axe z, c'est à dire tous perpendiculaires au « rayon vecteur ».



Mais voyons cela plus précisément.

Considérons une courbe fermée C, une boucle circulaire autour du fil, centrée sur le fil, et dans un plan orthogonal au fil, de rayon r. Si nous prenons comme hypothèse que les lignes de champ magnétique forment justement des cercles autour du fil (ce qui se justifie à posteriori...) nous pouvons calculer très simplement la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long de la boucle circulaire : Les vecteurs du champ $\vec{B}$ sont tangents au cercle et de module B.

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{B} \cdot ds &= B \times \text{longueur de la boucle} \\ &= B.2\pi r \end{aligned} \tag{3}$$

Nous savons que (théorème de Stockes)

$$\oint_c \vec{B} \cdot ds \;=\; \iint_s (\mathrm{rot}\,\vec{B})_n \, da \tag{4}$$

(2) et (3) donnent :

$$B.2\pi r \;=\; \iint_s \left(\frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} \right)_n da$$

comme le vecteur densité de courant $\vec{j}$ est par hypothèse normal au plan de la boucle, l'indice n saute, et la somme sur la surface totale de la boucle est égale au courant I

$$B.2\pi r \;=\; \frac{I}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$B \;=\; \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{I}{r}$$

Nous avons précédemment rencontré le facteur $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}$ qi vaut exactement : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} = 10^{-7}$ (système S.I.) du fait du choix des unités, pour de raisons historiques, nous y reviendrons, faisons-le apparaître dans notre expression de B:

$$\begin{aligned} B \;&=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{2I}{r} \\ &=\; 2 \times 10^{-7} \times \frac{I}{r} \end{aligned} \tag{5}$$

2 Force exercée par le courant sur une charge en déplacement

2.1 Calcul dans le référentiel « fixe » du fil

Supposons qu'une charge électrique q (une particule chargée, par exemple un électron) se déplace à proximité du fil, à la distance r, parallèlement au fil, avec une vitesse v identique (et de même sens) à la vitesse des électrons créant le courant dans le fil.

Le fil étant parcouru par un courant, il est entouré par un champ magnétique comme nous venons de le calculer. Or une charge se déplaçant dans un champ magnétique subit une force orthogonale à la direction du déplacement, au vecteur $\vec{B}$ du champ, ce qui, dans notre exemple, nous donne une force dirigée vers le fil, perpendiculairement au fil, de valeur :

$$\vec{F} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

ayant comme module :

$$\begin{aligned} F &= qvB \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{2qvI}{r} \end{aligned}$$

(puisque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont $\perp$)

Nous pouvons exprimer l'intensité (en ampères) sous la forme :

$$I = \rho v S$$

avec

$S =$ aire de la section du fil.

$v =$ vitesse des électrons dans le fil (identique par hypothèse à celle de notre charge)

$\rho =$ densité des électrons dans le fil (identique à celles des protons (charges +) puisque le fil est électrostatiquement non chargé par hypothèse).

d'où la force :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \times \frac{2q\rho v^2 S}{r} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \times \frac{\rho S}{r} \times \frac{v^2}{c^2} \end{aligned} \tag{6}$$

2.2 Calcul dans le référentiel de la charge extérieure

2.2.1 Etude qualitative

Plaçons nous maintenant dans le référentiel de la charge. Dans ces conditions la charge est immobile et c'est le fil qui se déplace suivant son axe.

Nous avions fixé comme hypothèse que la charge extérieure se déplaçait à la même vitesse et dans le même sens que les électrons qui participent au courant électrique dans le fil. Donc dans notre nouveau référentiel ces électrons sont immobiles tout comme la charge extérieure. Plus rien ne bouge ? Si ! Le fil n'étant pas « chargé », il comprend autant de charges positives que d'électrons négatifs. Et cette fois ces charges positives qui constituent la structure même du fil se déplacent. Donc elles créent un champ magnétique autour du fil... et tout rentre dans l'ordre ? la charge extérieure est-elle à nouveau sollicitée par ce champ magnétique ? Eh non puisque maintenant elle est immobile ! La force $\vec{F} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ est nulle si $v = 0$. Mais pourtant une force doit s'exercer sur la charge extérieure et l'attirer vers le fil sinon cela reviendrait à dire que le résultat de l'expérience dépend du référentiel galiléen (c.à.d. en mouvement rectiligne uniforme) dans lequel on se place. Alors si la charge extérieure continue à être attirée par le fil, qu'est-ce qui l'attire ? Un indice : la formule complète qui donne la force subie par une charge est la suivante :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Si le terme $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est maintenant nul, il faut peut-être regarder du côté du terme $q\vec{E}$.

Mais ne devrait-il pas être nul puisque le fil n'est pas chargé ($\vec{E} \simeq 0$) ? Pas si sûr !

Lorsqu'on affirmait que le fil n'était pas chargé on ne faisait que dire qu'il comprenait autant de charges (+) que de charges (-) par unité de longueur, c'est à dire que la densité de charges ρ_+ était la même que la densité de charges ρ_-

Mais maintenant que le fil se déplace par rapport à nous (à l'observateur), il faut prendre en compte les effets relativistes. Et nous avons vu lors de l'étude succincte de la théorie de la relativité restreinte que la longueur d'un objet en mouvement paraît raccourcie dans le sens du déplacement dans la proportion suivante :

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Donc le fil doit paraître raccourci. Mais on a considéré qu'il était de longueur infinie... Oui mais n'importe quel segment de ce fil doit paraître raccourci. Mais pour autant le nombre de charges positives comprises dans ce segment reste inchangé. On peut dont en conclure que la densité de charges ρ_+ parait augmentée. Mais pas celle des électrons du courant qui eux sont immobiles dans ce repère.

Maintenant $\rho_+ > \rho_-$ Le fil parait chargé positivement ! Ce qui attire la charge (électron) extérieure. Donc le résultat de l'expérience est inchangé (qualitativement) dans ce nouveau repère par rapport à ce qu'il était dans le repère du fil. Reste à calculer :

- qu'il est inchangé quantitativement, ce que nous ferons.
- que le principe reste valable si la vitesse de la charge extérieure est différente de celle des électrons de conduction

Mais d'ores et déjà nous pouvons dire **la chose extraordinaire suivante** : Le champ magnétique n'est qu'un effet relativiste apparent lors du déplacement de charges électriques, ou plus rigoureusement (je cite Richard Feynman): « Les forces magnétiques et électriques sont une partie d'un seul phénomène physique : les interactions électromagnétiques entres particules ».

2.2.2 Etude quantitative

1) Soit ρ_0 la densité de charges au repos (dans le référentiel $\boldsymbol{R}$ du fil, avec le fil au repos et le courant = 0). Dans ces conditions $\rho_+ = \rho_- = \rho_0$

2) Etablissons le courant des électrons du conducteur, mettons la charge (-) extérieure en mouvement

Soit

- $\boldsymbol{R}$ le référentiel du fil (structure cristalline des atomes le constituant)
- $\boldsymbol{R}'$ le référentiel « du courant » c'est à dire des charges (-) en mouvement dans le fil. Dans $\boldsymbol{R}'$ ce sont les charges (+) constituant le fil qui se déplacent.

Dans $\boldsymbol{R}$ nous avons :

$$\begin{cases} \rho_+ \\ \rho_- = \dfrac{\rho'_-}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

c.a.d : $(\rho'_-) = (\rho_-)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Dans $\boldsymbol{R}'$ nous avons :

$$\begin{cases} \rho'_+ = \dfrac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \rho'_- \end{cases}$$

c.a.d : $(\rho_+) = (\rho'_+)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Dans $\boldsymbol{R}$ le conducteur n'est pas chargé ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}(\rho_+) + (\rho_-) &= 0 \\ (\rho_-) &= -(\rho_+)\end{aligned}$$

Question : que vaut la quantité [$\rho' = (\rho'_+) + (\rho'_-)$]? zéro? le fil paraît-il également non chargé dans le référentiel $\boldsymbol{R}'$? voyons cela :

En combinant les formules obtenues plus haut nous obtenons :

$$\begin{aligned}\rho'_- &= (\rho_-)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= -(\rho_+)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho' &= (\rho'_+) + (\rho'_-) \\ &= \frac{\rho_+}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - (\rho_+)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \rho_+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\ &= \rho_+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho_+\left(\frac{1-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\\
&= \rho_+\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Nous voyons que $\rho' \neq 0$

Le fil paraît chargé dans le référentiel $\boldsymbol{R}'$.

Mais alors... la charge (-) placée à l'extérieur du fil et à proximité doit être attirée par le fil par une force électrostatique F'. Calculons la valeur de cette force d'attraction :

Pour un fil rectiligne uniformément chargé, le champ à la distance r du fil vaut :

$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ avec λ = charge par unité de longueur $\lambda=\rho S$

(voir article sur le champ électrique)

Dans notre cas, dans le référentiel $\boldsymbol{R}'$ le champ électrique à la distance r du fil a comme valeur :

$$
\begin{aligned}
E' &= \frac{\rho' S}{2\pi\varepsilon_0 r}\\
&= \frac{S}{2\pi\varepsilon_0 r}\times\rho_+\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

La force électrostatique F' a donc comme valeur :

$$\begin{aligned} F' &= qE' \\ &= \frac{qS}{2\pi\varepsilon_0 r} \times \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Cette force F' calculée ci-dessus dans le référentiel $\boldsymbol{R}'$, prendra, dans le repère $\boldsymbol{R}$ du fait du mouvement relativiste, la valeur $F = F'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} F &= \frac{qS}{2\pi\varepsilon_0 r} \times \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{qS}{2\pi\varepsilon_0 r} \times \rho_+ \times \frac{v^2}{c^2} \\ &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \times \frac{\rho S}{r} \times \frac{v^2}{c^2} \qquad (7) \end{aligned}$$

Nous constatons que (7)=(6 paragraphe 2.1 ci-dessus) : La force magnétique qui agit sur la charge extérieure se déplaçant près du fil (dans le repère « fixe », calculée d'après les équations de Maxwell) est exactement la même que la force électrostatique qui agit sur la charge immobile placée près du fil se déplaçant (dans le repère mobile, calculée d'après la loi de Coulomb et la théorie de la relativité restreinte).

C'est la même chose ! Les forces électriques et magnétiques sont deux aspects de la même chose qui dépendent simplement du point de vue d'où l'on se place !

Les équations de Maxwell qui regroupent en un corpus cohérent les lois de l'électricité et du magnétisme établies par des expériences classiques sont relativistes, bien qu'antérieures à la théorie de la relativité.