

La Théorie de la Relativité Restreinte

PAR SILICIUM628

Pourquoi étudier le théorie de la relativité restreinte sur ce site traitant essentiellement de l'électronique, et des mathématiques qui sont indispensables pour calculer les circuits électroniques et donc comprendre les lois de l'électricité, et de l'électromagnétisme ? Eh bien justement parce que les équations de Maxwell qui constituent l'essentiel des lois de l'électromagnétisme SONT des lois relativistes. Et c'est ce que nous allons démontrer ici, après avoir compris en quoi consiste la théorie de la relativité restreinte.

1 Postulats de la relativité restreinte :

- Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.
- La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels galiléens.

Cela nous amène à préciser tous ces termes.

1.1 Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen (ou référentiel inertiel) est un référentiel dans lequel tout corps libre (masse sur laquelle il ne s'exerce aucune force) est soit au repos (ses coordonnées ne changent pas au cours du temps), soit en mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante en module et direction, donc pas d'accélération ni de rotations).

1.2 Vitesse de la lumière

Nous avons vu dans les articles précédents, traitant de l'électromagnétisme, que la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$) est aussi la vitesse de toute onde électromagnétique. On sait la mesurer directement de beaucoup de façons toutes plus précises les unes que les autres, mais nous avons vu aussi que :

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Il se trouve que les valeurs des constantes ε_0 (permittivité du vide) et de μ_0 (perméabilité magnétique du vide) étaient connues du temps de Maxwell (comme le résultat d'expériences précises mettant en jeu des forces exercées par des charges et des courants électriques).

Le travail de Maxwell a consisté en une unification des lois de l'électricité et du magnétisme pour aboutir à ses célèbres équations. Et dans ces équations apparut une valeur (carré d'une vitesse v^2) qui s'avéra être égale au carré de la vitesse de la lumière (c^2). Mais alors que les lois de l'électromagnétisme venaient d'être formulées, il n'était pas connu que la lumière **est** une onde électromagnétique (c'est **aussi** un ensemble de photons mais nous verrons cela plus tard).

Toutefois Maxwell remarqua cette (stricte) égalité $v^2 = c^2$ et fit la remarque suivante : Je cite ici Richard Feynman qui cite Maxwell :

« On peut difficilement éviter de conclure », dit Maxwell, « que la lumière consiste en vibrations transverses du même milieu que celui qui est la cause des phénomènes électriques et magnétiques ».

Et oui, Maxwell croyait en la présence de « l'éther luminifère ». Toutefois il se rendit compte que ses belles équations n'avaient pas vraiment besoin de cet « éther luminifère » et qu'au contraire ce dernier ne permettait pas de rendre compte de toutes les propriétés de l'électromagnétisme.

La théorie de l'éther luminifère avait au moins comme avantage d'être prédictive et de se prêter à l'expérience. Et donc de multiples expériences furent menées pour le mettre en évidence. (La plus célèbre est celle de l'interféromètre de Michelson et Morley). Toutes ont échouées. La principale conséquence d'un « éther luminifère » serait que c n'aurait pas la même valeur dans tous les repères galiléens.

Le postulat « La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels galiléens » est donc une donnée expérimentale maintes fois vérifiée.

Autre point à préciser : actuellement on ne connaît aucun moyen plus rapide que la vitesse de la lumière de transmettre de l'information. Même si certaines interprétations de la non-localité de particules élémentaires dans le cadre de la mécanique quantique « font penser » à une influence à distance instantanée, cela ne constitue pas un moyen de transmettre de l'information entre deux observateurs.

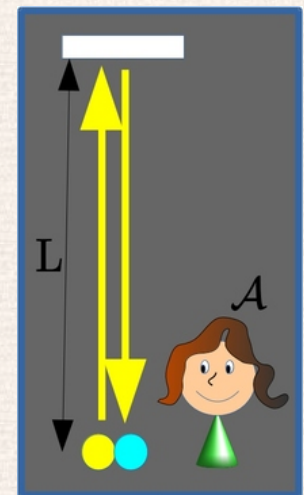
Donc *il semble bien* (et nous admettrons) que la vitesse de la lumière soit non seulement la même dans tous les référentiels galiléens, mais qu'elle soit aussi la vitesse la plus grande possible (en sciences, il faut toujours laisser une porte ouverte à l'imprévu...)

Nous allons maintenant nous intéresser aux implications des deux postulats sur les notions de simultanéité, d'espace et de temps.

2 Intervalles de temps propre et impropre

Considérons le dispositif suivant : sur un support rigide sont fixés :

- une lampe flash (en jaune).
- un miroir.
- un détecteur de lumière couplé à un chronomètre électronique ultra précis (en bleu).
- un siège sur lequel est assise une observatrice (Alice) **A** qui nous communiquera le résultat de sa mesure.



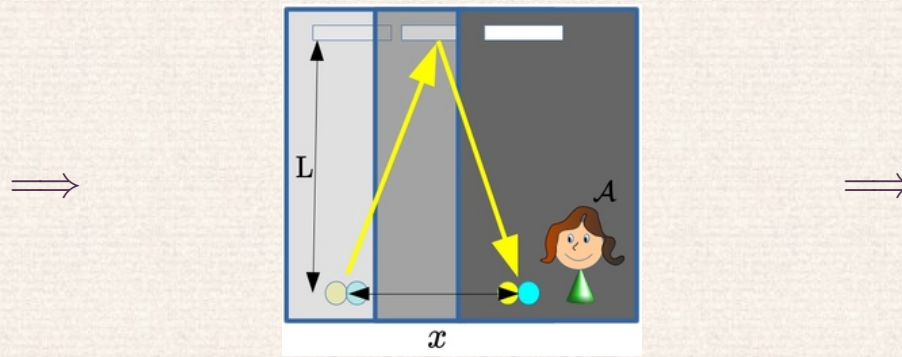
A l'instant t_0 Alice déclenche l'éclair lumineux du flash (ce qui lance le chronomètre). Le rayon de lumière va parcourir la distance (verticale) L séparant la lampe du miroir, se réfléchir sur le miroir et parcourir à nouveau la distance L dans l'autre sens jusqu'au détecteur qu'il atteindra au temps t_1 . La vitesse de la lumière étant constante et valant c , le temps $t = t_1 - t_0$ d'aller-retour du rayon mesuré par le chronomètre d'Alice, qu'on pourrait appeler le « temps de vol » et qui est un *intervalle de temps* vaudra :

$$\begin{aligned} t &= t_1 - t_0 \\ &= \frac{2L}{c} \end{aligned} \tag{1}$$

Ce temps mesuré par Alice sur le dispositif immobile par rapport à elle, dans un repère orthonormé attaché au dispositif, est appelé le temps propre du dispositif. Jusque là, rien de plus classique.

Supposons maintenant que ce même dispositif soit disposé à bord d'une fusée passant devant nous à (grande) vitesse constante de valeur v , de la gauche vers la droite. Si Alice refait l'expérience, elle trouvera la même valeur pour l'intervalle de temps t puisque la vitesse de la lumière est la même pour tous les observateurs.

De notre point de vue (celui d'un observateur voyant passer la fusée), les choses, mesurées dans notre repère orthonormé (qui est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à celui d'Alice) seront différentes :



Lorsque le rayon lumineux atteint le miroir, le dispositif s'est déplacé (dans notre repère) d'une certaine distance horizontalement, disons $x/2$. Le rayon se réfléchit sur le miroir, et lorsqu'il atteint le détecteur, le dispositif aura parcouru à nouveau une distance $x/2$ soit en tout un déplacement égal à x .

De notre point de vue la distance parcourue par le rayon est plus grande que celle trouvée par Alice (qui valait $2L$). Appelons cette nouvelle distance totale S (qui est la somme de $S/2$ pour le trajet montant « incliné » et à nouveau $S/2$ pour le retour descendant « incliné », qui sont à l'évidence plus longs que L).

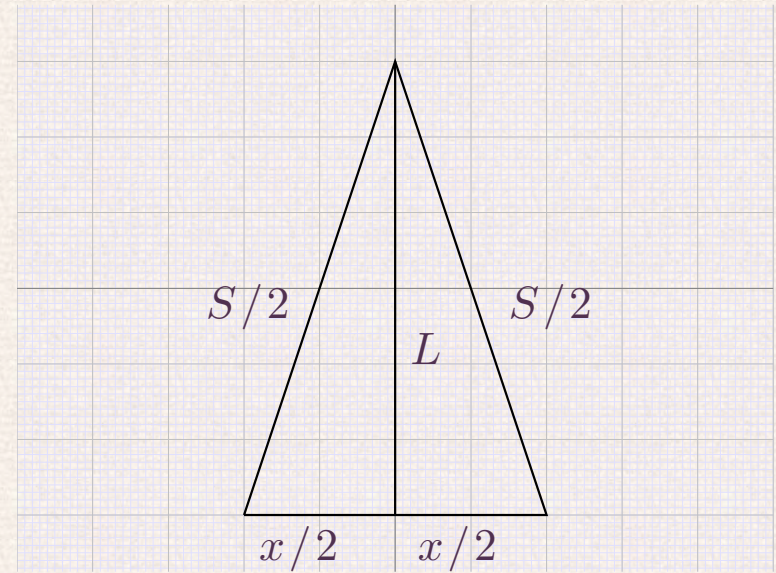
Appelons t' le temps mesuré par notre chronomètre pour parcourir cette distance S .

t' est dit « temps impropre » parce qu'il n'est pas mesuré depuis le référentiel dans lequel se déroule le phénomène à étudier.

Nous allons calculer t' en fonction de t et de v .

Pour cela calculons S :

Nous avons deux triangles rectangles identiques dont les hypoténuses ont pour longueur $S/2$



Pythagore nous dit :

$$\begin{aligned}(S/2)^2 &= (x/2)^2 + L^2 \\ S^2/4 &= x^2/4 + L^2 \\ S^2 &= x^2 + 4L^2 \\ &= x^2 + (2L)^2\end{aligned}$$

Remarquons que la distance parcourue x pendant le temps t' vaut :

$x = vt'$ (v étant la vitesse de la fusée mesurée dans notre repère)

$$S^2 = (vt')^2 + (2L)^2 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{2L}{c} \Rightarrow 2L = ct$$

remplaçons donc $2L$ par ct dans (2), il vient :

$$S^2 = (vt')^2 + (ct)^2$$

Le temps de vol t' que nous mesurons sur notre chronomètre est : $t' = S/c$

Calculons la valeur de ce t' en fonction de t (mesuré par Alice) et de v (vitesse d'Alice et de sa fusée par rapport à nous).

$$\begin{aligned} t' &= S/c \\ t'^2 &= S^2/c^2 \\ c^2 t'^2 &= S^2 \\ &= (vt')^2 + (ct)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 t'^2 - v^2 t'^2 &= c^2 t^2 \\ t'^2 (c^2 - v^2) &= c^2 t^2 \\ t'^2 &= \frac{c^2 t^2}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

Et voilà déjà la fameuse formule de la théorie de la relativité restreinte à propos de la dilatation du temps. Avouons que cette démonstration n'est pas trop méchante !

Lorsque Alice nous communique par radio le résultat de sa mesure, et qu'on le compare avec le nôtre, trouvons nous réellement une différence ? La réponse est oui, et on sait le faire depuis que les horloges atomiques sont suffisamment miniaturisées pour être transportées dans des fusées et autres sondes interplanétaires. Mais on arrive également à la même conclusion en observant la durée de vie de particules élémentaires : Des particules instables à courte durée de vie accélérées à de grandes vitesses se désintègrent après un laps de temps plus long que des particules identiques se déplaçant lentement. C'est d'ailleurs ce qui permet de détecter certaines d'entre elles qui sans cela ne « vivraient » pas suffisamment longtemps pour atteindre les détecteurs placés près des accélérateurs de particules.

En résumé la durée d'un phénomène n'est pas la même si on effectue la mesure en étant immobile ou en déplacement par rapport à lui. Et par phénomène nous entendons *n'importe quel phénomène physique*, y compris le fonctionnement de n'importe quel type d'horloge. C'est donc le temps lui même qui doit être vu différemment suivant que l'on soit immobile (on parle de temps propre) ou en déplacement (temps impropre) par rapport au phénomène mesuré. Toutefois le voyageur intersidéral ne verra jamais sa montre ralentir puisqu'elle est immobile par rapport à lui.

On pourrait se dire : « à quoi bon se casser la tête avec ce temps impropre, chacun lit l'heure à sa montre et tout va bien ». D'autant que la différence entre le temps impropre et le temps propre ne devient significative que pour des vitesses très grandes, de l'ordre d'une fraction de la vitesse de la lumière... Et il suffit de placer judicieusement l'horloge pour qu'elle soit fixe par rapport à l'objet à mesurer... Eh bien justement en physique des particules on est confronté à des vitesses de déplacement très grandes, et il n'est évidemment pas question d'attacher une horloge sur un électron !! Et puis il y a un autre domaine où la prise en compte des effets relativistes est incontournable, c'est l'électromagnétisme. Car dans ce dernier cas, même si les vitesses de déplacement des charges sont faibles, la grandeur de l'interaction électromagnétique est tellement importante que les effets relativistes deviennent tout à fait perceptibles à notre échelle : En particulier le champ magnétique créé par le déplacement des charges (y compris dans un aimant permanent) est un effet purement relativiste. Mais ne brûlons pas les étapes, nous y reviendrons.

Maintenant que nous savons d'où provient cette dilatation du temps et que nous savons la calculer, et avant de passer à l'étude du raccourcissement des longueurs, nous allons, en guise d'entracte, regarder de plus près un corollaire des postulats de base.

3 Corollaire du second postulat

Le second postulat affirme que la vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans tous les référentiels galiléens.

Cela revient à dire que la vitesse de la lumière est indépendante de la vitesse de sa source.

S'il n'en était pas ainsi, si la vitesse de la lumière dépendait de la vitesse de sa source (comme c'est le cas des flèches d'arbalète par exemple, pour prendre un exemple pas trop guerrier), lorsqu'on mesurerait la vitesse de la lumière émise par une source qui se déplace vers nous, on trouverait une valeur supérieure à c .

Or une telle mesure effectuée sur la lumière reçue de couples d'étoiles en rotation rapide (ou « étoiles doubles ») donne toujours c , quelle que soit la vitesse des étoiles. D'autres mesures ont été effectuées sur des photons rapides produits par la désintégration de mésons π^0 donnant là aussi toujours c .

Mais alors par quoi est constituée la lumière ? Une onde sans doute ! En effet les ondes ont cette particularité d'avoir une vitesse de propagation donnée par rapport à un support (qui vibre) et non par rapport à la source d'émission. Cette vitesse dépend d'ailleurs des caractéristique du milieu de propagation. La notion d'« éther » existait depuis l'antiquité. Logiquement les physiciens la reprirent sous le terme « d'éther lumineuse » pour désigner le support supposé des ondes lumineuses, puis plus généralement électromagnétiques.

Il en fut ainsi jusqu'à l'avènement de la théorie de la relativité restreinte. Pourquoi donc avoir abandonné cette notion d'éther ?

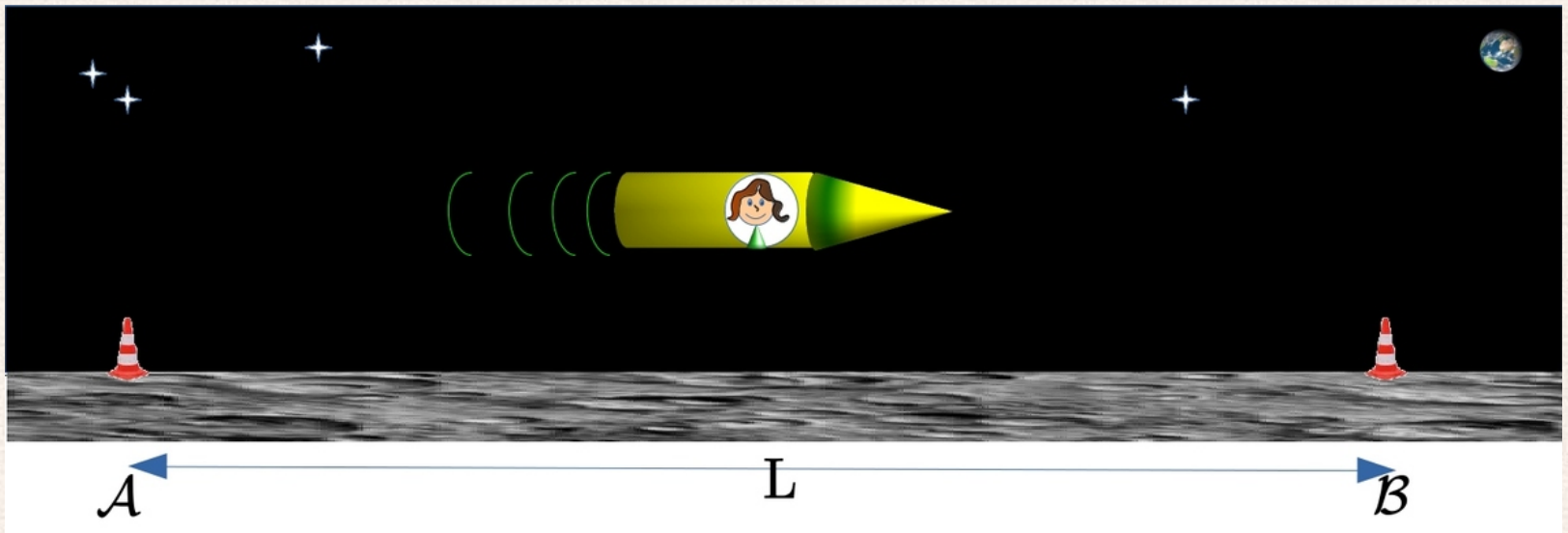
Si l'éther lumineuse existait, il expliquerait bien l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à la vitesse de déplacement de la source. Oui mais il y a un hic ! Dans ce cas la vitesse mesurée de la lumière dépendrait cette fois de la vitesse de l'observateur par rapport à... l'éther. L'expérience de Michelson et Morley et d'autres

qui suivirent montrèrent que la vitesse mesurée de la lumière est aussi indépendante de la vitesse de l'observateur. Et nous avons vu que dans les équations de Maxwell ne figure pas la notion d'éther. Donc bye bye l'éther.

La théorie de la relativité restreinte nous montre que c'est la notion de temps qui doit être revue plus attentivement. Mais ce n'est pas la seule ! La notion d'espace va aussi subir une remise à niveau. C'est ce que nous allons voir maintenant.

4 La contraction des longueurs

Cette fois Alice va venir survoler la Lune (pour qu'on ne vienne pas m'embêter avec des problèmes d'atmosphère !) avec sa fusée et passer en rase mote au dessus de deux repères que nous aurons préalablement plantés par terre pardon, par lune. Nous, en tant qu'observateurs, sommes assis sur la Lune.



Dans le référentiel de la Lune, qui est celui des repères, la fusée se déplace avec une vitesse v . Elle passe successivement au dessus du repère A puis au dessus du repère B . Elle parcourt la distance L séparant ces deux repères en un temps $t' = L/v$. Ce temps est un temps impropre dans le référentiel de la Lune parce qu'il concerne des événements qui se produisent en des lieux différents. (Il faut disposer de deux horloges situées chacune près d'un des repères pour les chronométrer. Et alors se posent des problèmes de synchronisation des horloges). Aussi on va le déduire très simplement du temps propre mesuré par Alice avec un chronomètre unique à bord de la fusée.

En effet Alice est présente près du repère lors de chaque passage à un des repères, et peut ainsi mesurer un temps propre t des chaque événement.

Nous avons calculé en (4) que
$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et donc :

$$\begin{aligned} t &= t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Ainsi pour Alice, le temps t qui sépare les deux événements vaut
$$t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Alice en déduit que la distance séparant les deux repères vaut $L_a = vt$

$$\begin{aligned} L_a &= vt \\ &= v \times \frac{L}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \tag{4}$$

remarque : $0 \leq \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \leq 1$ et donc $0 \leq \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \leq 1$ et $0 \leq \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \leq 1$

donc $L_a \leq L$ ($L_a = L$ si $v = 0$)

Mais Alice peut aussi considérer que dans son référentiel ce sont les repères séparés par la distance L_a (qu'elle a mesuré) qui se déplacent par rapport à sa fusée. Elle peut donc légitimement en conclure que la distance L séparant les repères lorsqu'ils sont au repos semble plus courte (d'un facteur $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$) lorsqu'ils se déplacent suivant un mouvement rectiligne uniforme par rapport à elle.

C'est cet effet-là que l'on appelle le raccourcissement (ou retrécissement) relativiste des longueurs.

Les bornes repères peuvent en fait être des points situés aux extrémités de n'importe quel objet déterminant ainsi sa longueur, on en déduit qu'un objet paraîtra plus court (aplati dans la direction du mouvement, déformé donc) lorsqu'il se déplace par rapport à l'observateur. Nous verrons les conséquences de cet effet en électromagnétisme.