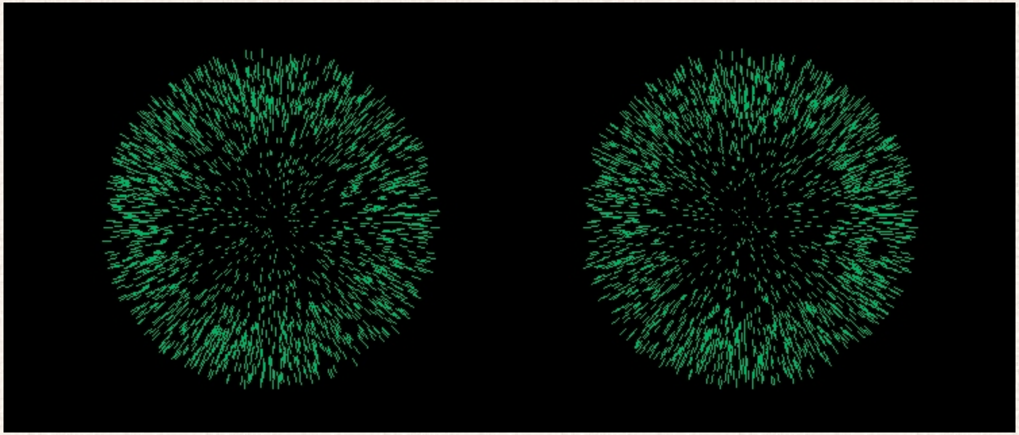
Divergence d'un champ électrique
Première loi de Maxwell

Vous avons vu que la divergence d'un champ vectoriel 3D en $1/r^2$ est nulle partout sauf pour un volume contenant l'origine.

Ci-contre : Champ 3D programmé en C++ Qt4 à voir « en louchant ».



Nous allons maintenant calculer cette valeur non nulle de la divergence dans ce volume particulier dans le cas du champ électrique.

Nous avons déjà fait connaissance avec le champ électrique qui, dans le cas d'une particule chargée immobile est radial et décroit en $1/r^2$ à la distance r de la particule.

Sa valeur est $\|\vec{E}\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}$

Nous avons calculé le flux total à travers une surface fermée contenant la particule, il vaut :

$\Phi_{\text{tot}} \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ et ne dépend pas de l'aire de la surface.

$$\Phi_{\text{tot}} \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

où q est la somme des charges internes dans le cas où il y a plusieurs charges dans la volume.

Nous savons également que le bilan de flux pour un volume élémentaire est :

$$d\Phi \;=\; (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})dV \tag{2}$$

La divergence du champ vectoriel pour un volume délimité par une surface fermée est égale à la différence entre le flux sortant et le flux entrant dans le volume. Si la surface fermée considérée englobe l'origine, si donc l'origine est contenue dans le volume, il n'y a pas de flux entrant, la totalité du flux sort du volume en traversant cette surface. Nous connaissons la valeur de ce flux total, voir (1).

Lorsqu'il y a plusieurs charges dans le volume, on considère une densité moyenne de charge ρ telle que :

$$dq \;=\; \rho \mathrm{dV} \tag{3}$$

(ce qui donne bien la charge totale en intégrant sur le volume $q = \rho V$)

(1) et (2) donnent :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})dV = \frac{dq}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

(3) et (4) donnent :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})dV = \frac{\rho dV}{\varepsilon_0}$$

ce qui, en simplifiant par dV nous donne la première **équation de Maxwell** :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$