Divergence d'un champ vectoriel

1 Définition de la divergence :

Nous allons reparler du vecteur opérateur nabla ∇ que nous avons rencontré dans l'étude du gradient d'un champ scalaire. Cet opérateur n'est défini qu'en coordonnées cartésiennes.

1.1 Rappel :

L'opérateur nabla est essentiellement un opérateur différentiel qui opère des dérivées partielles. Son produit scalaire par un champ **scalaire** donne un champ vectoriel : le gradient.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$ -> résultat un vecteur.

Nous allons aujourd'hui appliquer nabla à un champ **vectoriel**. Nous obtenons ainsi la *divergence* du champ vectoriel.

Pour cela il faut effectuer le **produit scalaire** du vecteur opérateur nabla par le champ vectoriel et nous obtenons la divergence du champ vectoriel.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathrm{div}\,(\vec{E})$ (divergence de $\vec{E}$) -> résultat d'un produit scalaire, donc un scalaire.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z$

en clair :

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Lorsque nous disons que nous appliquons nabla au champ vectoriel (et pas à un vecteur seul) nous voulons dire que nous l'appliquons en chaque point de l'espace aux vecteurs du champs vectoriel, et qu'en chacun de ces point nous obtenons un nombre scalaire. Tous ces scalaires forment un champ scalaire.

Question : Que représente cette divergence ? Pour répondre à cette question remarquons que c'est un produit scalaire obtenu en faisant la somme de trois termes. Voyons donc ce que représentent chacun de ces termes.

1.2 Raisonnons en termes de flux :

Si l'on considère les composantes du vecteur $\vec{E}$, le flux élémentaire traversant une surface dS_x élémentaire orthogonale à l'axe des x au point (x, y, z) est :

$\partial \Phi_x = E_x(x, y, z) \times dS_x$

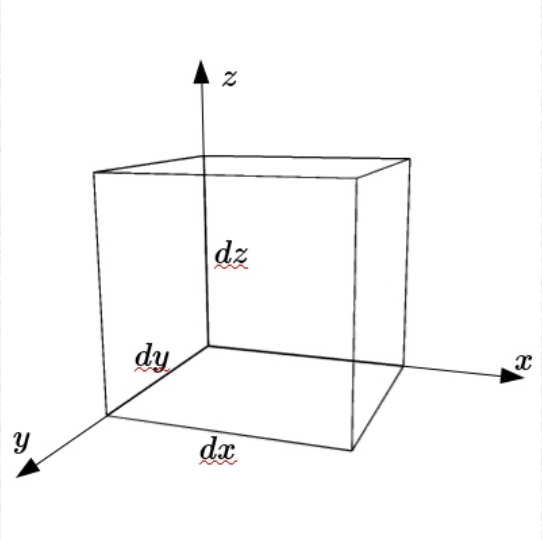
pour une surface élémentaire dS_y orthogonale à l'axe des y au point (x, y, z) :

$\partial \Phi_y = E_y \times dS_y$

et pour une surface élémentaire dS_z orthogonale à l'axe des z au point (x, y, z) :

$\partial \Phi_z = E_y \times dS_z$

ces trois surfaces élémentaires dS_x , dS_y , dS_y (dédoublées) peuvent former les faces d'un cube élémentaire de volume $dV = dS_x \times dS_y \times dS_z$.



Supposons que le flux traverse ce cube.

Le flux qui **entre** par la face de gauche est :

$$-E_x(x, y, z) \times dS_x = -E_x(x, y, z) \times dydz$$

puisque au point (x, y, z) nous avons $dS_x = dy \times dz$

(par convention pour une surface fermée le flux sortant est positif, le flux entrant est négatif).

Le flux qui **sort** par la face de droite située en $(x + dx, y, z)$ est

$E_x(x + dx, y, z) \times dS_x = E_x(x + dx, y, z) \times dydz$ (sortant -> positif)

La somme de flux entre celui qui entre et de celui qui sort est

$$d\Phi_x = E_x(x + dx, y, z) \times dydz - E_x(x, y, z) \times dydz = E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} d\Phi_x &= E_x(x + dx, y, z) \times dydz - E_x(x, y, z) \times dydz \\ &= [E_x(x + dx, y, z) - E_x(x, y, z)] \times dydz \\ \\ &= \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} dx \right] \times dydz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\,dy\,dz \\
&= \frac{\partial E_x}{\partial x} dV
\end{aligned}
$$

Le même calcul pour les directions y et z nous permet d'obtenir la différence entre le flux total qui entre dans le cube et celui qui sort (on parle de *bilan* de flux):

$$
\begin{aligned}
d\Phi &= \frac{\partial E_x}{\partial x} dV + \frac{\partial E_y}{\partial y} dV + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV \\
&= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dV \\
&= (\vec{\nabla}.\vec{E}) dV
\end{aligned}
$$

Une divergence positive en un point $P(x, y, z)$ correspond à un flux majoritairement sortant autour de ce point.

Si le champ de vecteur représente la vitesse de particules d'un fluide, un fluide incompressible donnera lieu à des divergences nulles, au contraire d'un fluide compressible (par exemple un gaz) *qui pourra* donner lieu à un flux majoritairement entrant dans une zone en compression, ou majoritairement sortant d'une zone en expansion. C'est également le cas du champ électrique comme nous le verrons.

Si nous considérons non plus un cube élémentaire mais un volume V délimité par une surface fermée, le flux à travers cette surface est égal à l'intégrale sur ce volume de la divergence du champ vectoriel.

$$\Phi \;=\; \int_V \operatorname{div}(\vec{E})dV = \iiint \operatorname{div}(\vec{E})dV$$

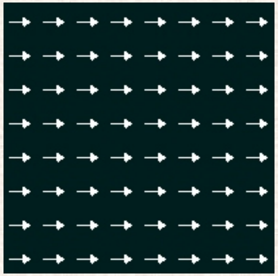
et en 2D (dans le plan $\mathbb{R}^2$) : $\Phi = \int_S \operatorname{div}(\vec{E})dS = \iint \operatorname{div}(\vec{E})dS$

2 Exemples dans le plan $\mathbb{R}^2$

Je vais commencer par donnes quelques exemples de divergence de champs simples (dans le plan $\mathbb{R}^2$) :

2.1 Champ uniforme dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit le champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que



$\vec{\mathbb{E}}\begin{cases} E_x = 10 \\ E_y = 0 \end{cases}$

C'est un champ dit *uniforme* : Tous les vecteurs en tous points de l'espace (ici du plan) ont la même valeur.

Calculons sa divergence :

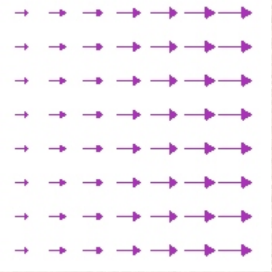
$\operatorname{div}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial_x} + \frac{\partial E_y}{\partial_y} = 0 + 0 = 0$

Sa divergence est nulle (en tous points, $\forall$ le point (x, y) considéré).

Si l'on considère une petite surface (en 3D nous aurions dit volume) , le flux entrant est toujours égal au flux sortant.

2.2 Champ unidirectionnel non uniforme dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit le champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que



$\vec{\mathbb{E}}\left\{ \begin{smallmatrix} E_x = a\,x \\ E_y = 0 \end{smallmatrix} \right.$ avec $a \neq 0$

C'est un champ dont tous les vecteurs sont parallèles et dont le module augmente lorsqu'on se déplace dans le sens des x :

Calculons sa divergence :

$\operatorname{div}(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial_x} + \frac{\partial E_y}{\partial_y}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial_x} &= \frac{\partial}{\partial_x}(a\,x) \\ &= a \end{aligned}$$

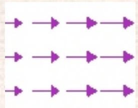
$$\frac{\partial E_y}{\partial_y} = 0$$

$\operatorname{div}(\vec{E}) = a$

La divergence de ce champ est partout la même et **elle n'est pas nulle**.

Tiens c'est curieux, pourtant ces vecteurs tous parallèles ne semblent pas du tout « diverger ». Ils ne divergent pas quant à leur direction, mais il divergent quant à la valeur de leur module (on parle de divergence modulaire).

Considérons une petite surface de hauteur h et de largeur l



et voyons ce qui se passe :

Tous les vecteur qui entrent dans cette surface le font par le côté de gauche, ceux qui sortent le font par le côté de droite, les côtés haut et bas ne sont pas traversés par le flux. Le flux entrant a pour valeur :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}} &= \int_h \|\vec{E}\| \cos(\alpha)\, dh \\ &= \int_h \|\vec{E}\| \cos(0)\, dh \\ &= a x_1 h\end{aligned}$$

Le flux sortant a pour valeur : $\Phi_{\text{out}} = a x_2 h$

comme $x_2 > x_1 \quad (x_2 - x_1 = l) \;\rightarrow\; \Phi_{\text{out}} > \Phi_{\text{in}}$

Le flux total à travers la surface fermée étant égale à la différence entre ces deux flux, elle vaut :

$\Phi = a x_2 h - a x_1 h = a h (x_2 - x_1) = a h l = a S$ avec $S = hl$ l'aire de la surface.

or dans le plan $\mathbb{R}^2$ nous avons trouvé que $\quad \Phi = \iint \operatorname{div}(\vec{E}) dS$

Calculons donc cette intégrale dans notre exemple avec $\operatorname{div}(\vec{E}) = a$ trouvé plus haut :

$\Phi = \int_S a\, dS = a\, S$

Nous retrouvons bien le même résultat. Ce deuxième calcul nous a simplement montré au passage que $\Phi_{\text{out}} > \Phi_{\text{in}}$ afin de nous convaincre que ce champ qui semble constant (dans l'espace) ne l'est pas du tout et que sa divergence qui semble nulle n'est pas du tout nulle.

Remarque : concernant le flux et la divergence, lorsque nous parlons de variations, de constance, d'augmentation ou diminution de module etc... c'est par rapport à la position dans l'espace, jamais par rapport au temps. Les vecteurs d'un champ vectoriel peuvent varier dans le temps, ce n'est pas ce que nous étudions ici. Nous étudions (pour l'instant) une situation « figée » dans le temps, statique.

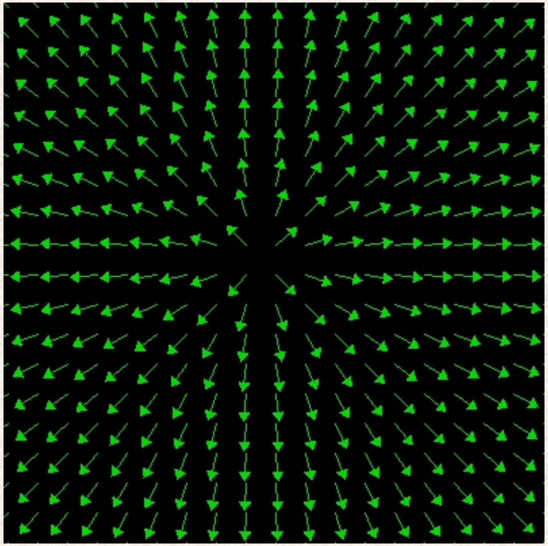
2.3 Champ radial dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit le champ vectoriel $\vec{E} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{\mathbb{E}} \begin{cases} E_x = a\, x / \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ E_y = a\, y / \sqrt{(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

avec $(x^2 + y^2) \neq 0$

Tous les vecteurs ont le même module qui ne dépend pas de la position.



Calculons sa divergence :

$$\mathrm{div}\,(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial_x} + \frac{\partial E_y}{\partial_y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial_x} &= \frac{\partial}{\partial_x}(a x / \sqrt{(x^2+y^2)}\,) \\
&= \frac{a\ y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_y}{\partial_y} &= \frac{\partial}{\partial_x}(a y / \sqrt{(x^2+y^2)}\,) \\
&= \frac{a\ x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\vec{E}) &= \frac{a\ x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a\ y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{a\ (x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= a(x^2+y^2)^{1-3/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(x^2+y^2)^{-1/2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}
$$

Remarque : ce calcul eût été plus simple en coordonnées polaires, mais je voulais rester en coordonnées cartésiennes pour coller à la représentation graphique.

Nous obtenons une divergence :

- positive, non nulle
- qui diminue proportionnellement au module du « rayon vecteur » (= la distance au centre $r = \sqrt{x^2+y^2}$)

Cela est dû à ce que les vecteurs, bien que de modules identiques, « s'écartent » en s'éloignant du centre (divergence directionnelle, positive). (Il serait plus juste de dire : pointent dans des directions qui s'écartent. En effet les vecteurs ne sont pas censés bouger ! Le temps ne figure pas dans les équations). Le flux entrant dans une surface délimitée par une courbe fermée sera inférieur aux flux sortant ($\operatorname{div}(\vec{E}) > 0$). Si chaque vecteur représente une goutte d'eau constituant un nuage, le nuage se dissipera. S'il représente la vitesse de déplacement d'une molécule dans un gaz, la pression diminuera. Mais la valeur absolue de cette divergence directionnelle positive diminuant avec la distance au centre, cette divergence deviendra négligeable à grande distance. Cela se remarque d'ailleurs sur le graphique, à grande distance du centre une petite surface est traversée par des vecteurs qui deviennent pratiquement parallèles. Le flux, lui, sera toujours le même. On tend alors vers un champ uniforme à grande distance.

3 Exemples dans l'espace $\mathbb{R}^3$

3.1 Champ radial en $1/r^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Soit le champ vectoriel $\vec{E}\colon \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (r est toujours > 0)

$r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

$\vec{\mathbb{E}} \begin{cases} E_x = \frac{x}{r^3} \\ E_y = \frac{y}{r^3} \\ \mathrm{Ez} = \frac{z}{r^3} \end{cases}$

ci-contre : « vue d'artiste » de ce champ

Vérifions que ces valeurs de composantes donnent bien un module du vecteur proportionnel à $1/r^2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbb{E}}\| &= \sqrt{(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)} \\ &= \left[\left(\frac{x}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{y}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{z}{r^3}\right)^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^6}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{r^2}{r^6}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{r^4}\right)^{1/2} = \frac{1}{r^2}$$

Calculons sa divergence :

$\mathrm{div}\,(\vec{E}) = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial_x} + \frac{\partial E_y}{\partial_y} + \frac{\partial E_z}{\partial_z}$

calculons chaque terme séparément pour plus de clarté...

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial_x} &= \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{x}{r^3}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial_x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\;x^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

(merci Maxima sous Linux)

J'ai développé le facteur r^3 parce qu'il contient un terme en x qu'il faut prendre en compte dans le calcul de la dérivée partielle en x. On le voit d'ailleurs apparaître dans le second terme ($3x^2/....$)

Calculons de même les dérivées partielles pour les autres composantes du vecteur :

$$\frac{\partial E_y}{\partial_y} = \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ y^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial_z} = \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ z^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

au total :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\vec{E}) &= \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ x^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ y^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ z^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\ z^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\ y^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\ x^2}{(z^2+y^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3\ (x^2+y^2+z^2)}{r^5} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0
\end{aligned}$$

La divergence est nulle ! Pourtant les vecteurs semblent bien s'écarter...

En fait il y a deux contributions à la divergence : la divergence directionnelle (ici les vecteurs s'écartent lorsqu'on s'éloigne du centre) et la divergence modulaire (le module des vecteurs décroît lorsqu'on s'éloigne du centre en $1/r^2$)

N'oublions pas en effet ce que représente la divergence, par définition : c'est, pour un volume considéré, le bilan entre le flux qui entre et celui qui sort du volume. Et dans le cas ci-dessus les vecteurs s'écartent donc ils sortent du volume en étant plus écartés, mais comme ils sortent plus loin du centre l'intensité de ceux qui sortent est moindre que celle de ceux qui entrent. Et le bilan de flux dans le cas d'une loi en $1/r^2$ est nul.

Nous constatons donc qu'une représentation graphique peut facilement être mal interprétée, et même si elle peut aider à comprendre ce qui se passe il faut toujours résoudre les équations ou au moins analyser le problème algébriquement avant de conclure. Mon prof' de math disait : la géométrie c'est l'art de raisonner juste sur une figure fausse. En fait on a vite fait de raisonner faux sur une figure juste !

Retenons donc que dans le cas d'un champ vectoriel en $1/r^2$ la divergence est nulle. Partout ? Non! Presque partout ! Si l'on place le volume n'importe où la divergence est nulle sauf si... sauf si le volume est placé de telle façon qu'il englobe l'origine, sauf s'il contient l'origine. Car dans ce cas tous les vecteurs sortent de la surface qui délimite ce volume, aucun ne rentre, et par conséquent la divergence ne peut pas être nulle. Elle a une certaine valeur positive non nulle.

Et quelle est cette valeur ? Je suis sûr que vous connaissez déjà la réponse. Je vous dirai ça la prochaine fois. Ce sera le moment de parler de la première loi de Maxwell.