Flux d'un champ vectoriel

1 Première approche :

Pour définir le flux d'un champ vectoriel dans l'espace $\mathbb{R}^3$, en un point de l'espace, il nous faut un champ vectoriel et une surface. Le flux en ce point est une quantité scalaire proportionnelle au module du vecteur de ce champ en ce point par l'aire de la surface. Mais il faut préciser les choses.

Premièrement le propre d'un champ vectoriel est d'être constitué de vecteurs définis en chaque point de l'espace et variant en module et en direction lorsqu'on se déplace de proche en proche dans l'espace (Ils peuvent aussi varier dans le temps, mais ce n'est pas ce qui nous occupe ici). Par conséquent il nous faudra choisir une surface petite, plus exactement un élément infinitésimal dS de surface autour du vecteur afin d'obtenir une valeur précise du vecteur.

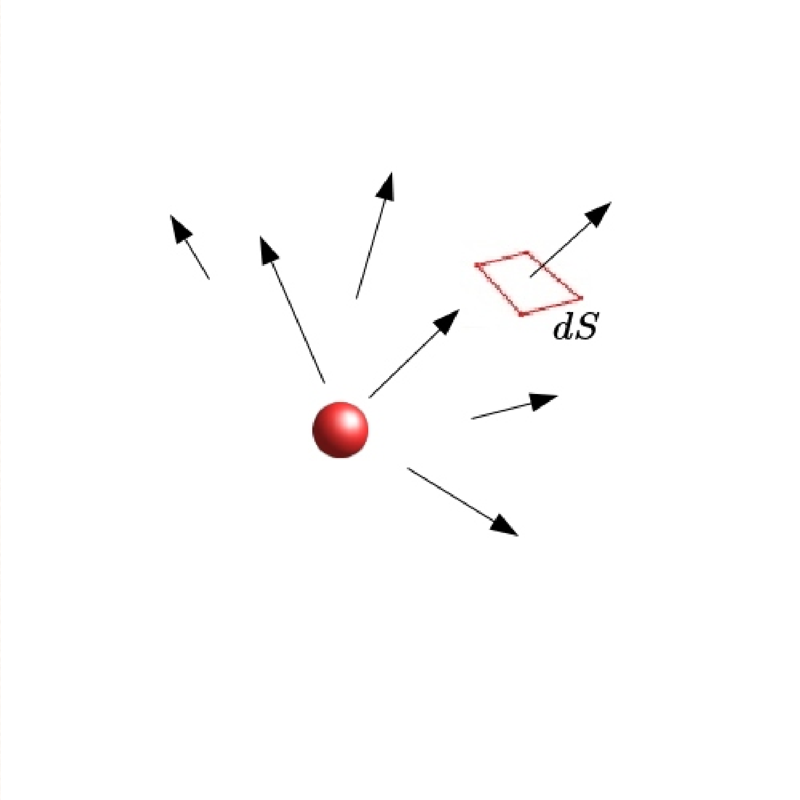
Deuxièmement le flux est considéré comme *traversant* la surface. Nous devons donc considérer un élément de surface orthogonal au vecteur. Si nous voulons calculer le flux traversant un élément faisant un angle quelconque avec le plan orthogonal au vecteur il faudra multiplier par le cosinus de l'angle entre la surface et le plan orthogonal. Si le vecteur et la surface sont dans le même plan le flux traversant cette surface sera donc nul.

2 Expression mathématique du flux

- soit $F\colon \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel

- soit $\vec{V}$ un vecteur de ce champ en un point P

- soit dS un élément de surface autour de P faisant un angle α avec le plan orthogonal au vecteur.



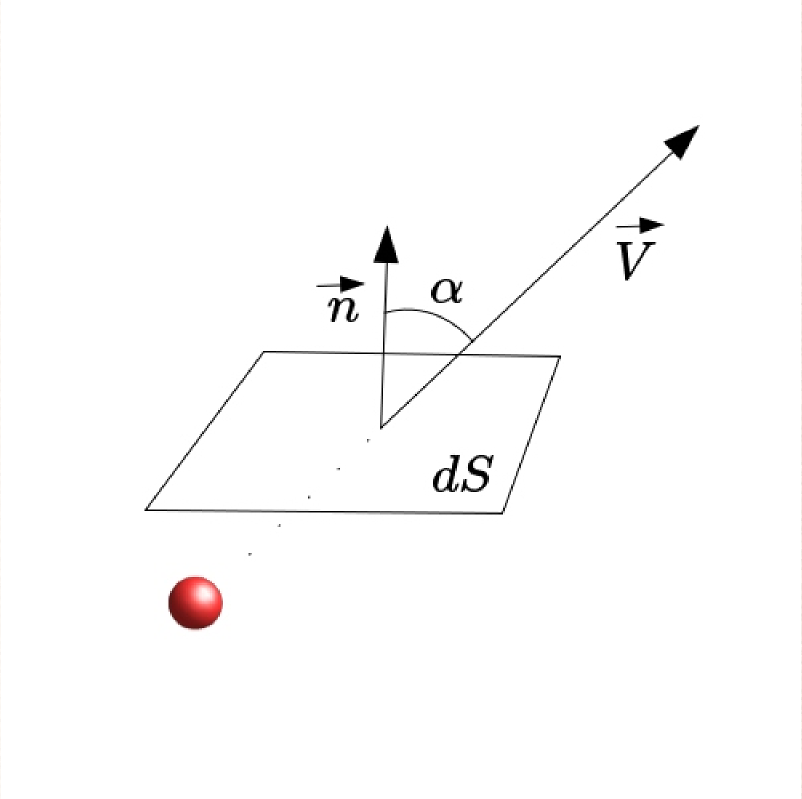
- soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à dS (dS étant de dimensions infinitésimales, on peut le considérer comme plan, et dire que $\vec{n}$ est orthogonal à dS).

Le flux élémentaire est $d\Phi = \vec{V}.\vec{n}\,dS$

C'est le produit scalaire [du vecteur considéré] par [le vecteur unitaire] le tout multiplié par dS.

Ce qui peut également s'écrire :

$d\Phi = \|\vec{V}\| \cos(\alpha)\, dS$



Le flux total à travers une surface quelconque est la somme des flux élémentaires sur cette surface, on l'obtient donc en calculant l'intégrale de $d\Phi$ sur la surface :

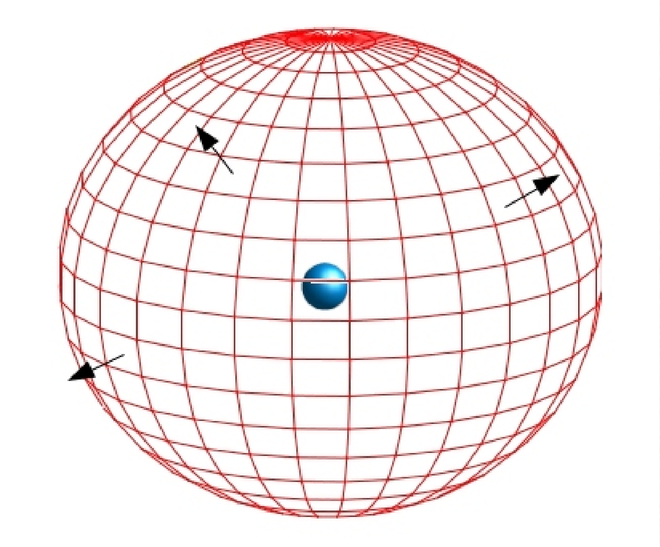
$$\begin{aligned}\Phi &= \int_s d\Phi \\ &= \int_s \vec{V}.\vec{n}\,dS\end{aligned}$$

où l'intégrale sur une surface $\int_s$ est une bien entendu une intégrale triple suivant (x, y, z) : $\iiint F(x, y, z) dx dy dz$

3 Exemple concret : Flux d'un champ électrique

Nous avons vu que le champ électrique émanant d'une particule chargée est radial, centré sur la particule.

Plaçons cette particule de charge q au centre d'une sphère imaginaire de rayon r et calculons le flux total qui traverse la sphère :



La particule étant au centre, tous les points de la sphère se trouvent à la distance r de la particule.

Le champ électrique en chaque point de la sphère est donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}$$

Le flux étant radial, tous les vecteurs traversent la sphère orthogonalement aux éléments de surface dS. Le $\alpha = \pi/2$ -> $\cos(\alpha) = 1$.

Le flux élémentaire en chaque point de la sphère est donc :

$$d\Phi = \|\vec{E}\| \, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} dS$$

Le flux total est :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_s d\Phi \\
&= \int_s \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}\, dS \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \int_s dS \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2}\, S
\end{aligned}$$

S étant la surface de la sphère, qui comme chacun sait vaut $S = \pi D^2 = 4\pi r^2$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Nous remarquons un résultat qui peut paraître étonnant, r^2 à disparu, le flux total ne dépend pas du rayon (de la taille) de la sphère. Tout se passe « comme si » le champ électrique était constitué de quelque chose qui se dilue dans l'espace mais dont la quantité totale se conserve. Mais il ne faut pas perdre de vue que l'analogie s'arrête là : le *quelque chose* en question n'est pas le flux d'une substance qui s'écoule, en particulier le flux du champ électrique ne s'épuise jamais.

Une autre simplification (par 4π) est dûe au choix judicieux de la valeur de ε_0.

Ce coefficient est appelé la permittivité diélectrique du milieu et se note toujours avec la lettre grecque épsilon ε . Lorsque le milieu en question est le vide, on parle de la permittivité diélectrique du vide, ou plus simplement de la *permittivité du vide* et on le note ε_0. On l'appelle aussi parfois la *constante diélectrique*.

Nous obtenons ainsi le théorème de Gauss :

Théorème.

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la somme des charges contenues dans le volume délimité par cette surface divisée par ε_0.

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{\sum Q_{\text{internes}}}{\varepsilon_0}$$

Il s'agit du flux électrique total engendré par une ou plusieurs particules chargées, qui ne dépend pas du rayon de la sphère, ni même de la forme de la surface **fermée** qui entoure la particule.

Valeur de $\boldsymbol{\varepsilon_0}$:

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2 \quad \text{soit} \sim 9 \times 10^9$ dans le système d'unités S.I.

Remarque :

$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ (exactement) où μ_0 est la constante magnétique et c la vitesse de la lumière.