

# Champs scalaires et vectoriels

## 1 Champ scalaire

Nous avons vu un exemple de champ scalaire avec la température en tout point de l'espace. On pourrait citer aussi un champ de pression (dans un fluide), la densité, l'altitude du relief (ou une hauteur), le potentiel électrique, la concentration d'un solvant ou d'un polluant, d'une fumée dans l'air, l'humidité dans l'air, la résistivité, la mobilité des porteurs dans un semi conducteur...

Un **champ scalaire** est une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (ou scalaire) à chaque point de l'espace.

Nous l'écrivons :

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x, y, z) = T$$

Nous connaissons également l'opérateur gradient  $\nabla$

$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$  qui est un vecteur défini pour chaque point de l'espace.

Il existe aussi des champs vectoriels (ou champs de vecteurs) qui associent à chaque point de l'espace un vecteur. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

## 2 Champ vectoriel

Déjà ne confondons pas champ vectoriel et espace vectoriel. Dans un champ vectoriel chaque vecteur est associé à une position dont il dépend. L'espace vectoriel est, quant à lui, l'ensemble de tous les vecteurs qu'on puisse former par combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Des exemples de champs vectoriels ? Nous en connaissons déjà au moins deux :

- les vecteurs gradients qui sont définis en chaque point de l'espace forment un champ vectoriel.
- Plus simplement les vecteurs positions ayant comme origine, pour chaque point de l'espace l'origine du repère, et comme extrémité le point considéré, forment un champ vectoriel.

Mais il en existe bien d'autres comme :

- les champs de vitesses (dans un fluide), les vents
- le champ électrique
- le champ magnétique
- le champ gravitationnel

On remarquera qu'il est plus facile de trouver des exemples de champs vectoriels que scalaires. En fait les phénomènes physiques sont essentiellement vectoriels (ils ont une direction et une orientation) du fait qu'ils découlent à notre échelle des interactions gravitationnelle, et électromagnétique qui sont orientées. Et lorsqu'on trouve un champ scalaire on se rend compte qu'il s'agit souvent à l'échelle microscopique d'une annulation du caractère vectoriel par une agitation désordonnée de très nombreux constituants (particules, molécules...)

## 2.1 Champs vectoriels dans $\mathbb{R}^2$

**exemple 1 :**

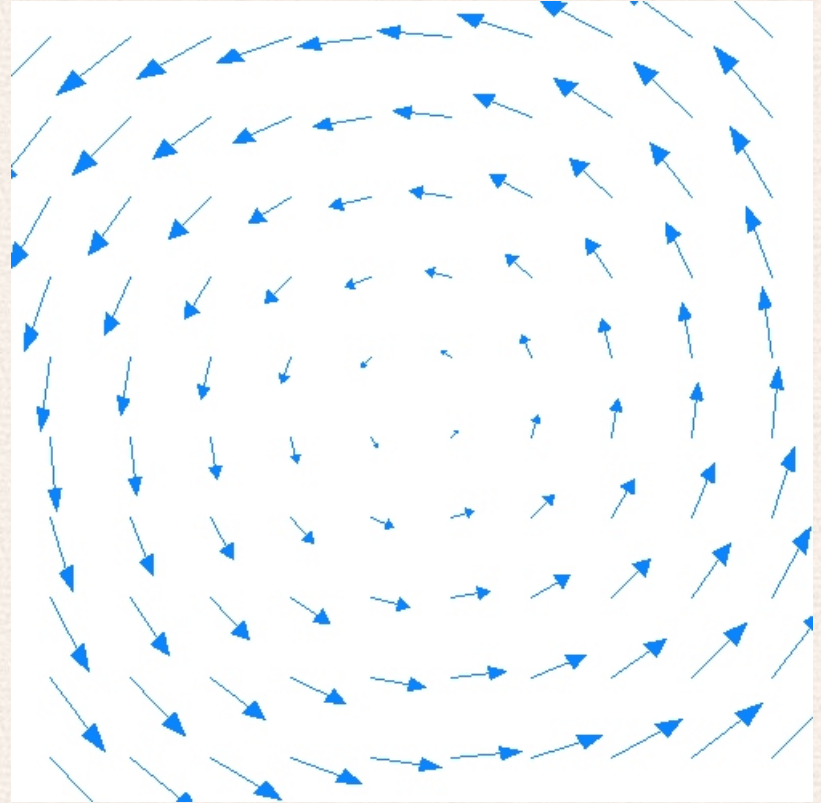
soit le champ vectoriel  $F$  défini dans le plan  $\mathbb{R}^2$  tel que :

$$F: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$



$$F(x, y) = \vec{V} \begin{pmatrix} v_x = y \\ v_y = -x \end{pmatrix}$$

Voici un tracé de quelques vecteurs constituant ce champ, choisis (par le programme informatique) en des emplacements bien alignés (mais ce n'est absolument pas obligatoire, on peut calculer un vecteur situé à un endroit quelconque du plan). C'est un champ « circulaire » comme on peut le constater. Qu'est-ce qui circule ? Un fluide ? Un liquide ? une foule ? En fait bien que nous étudierons la « circulation » d'un champ vectoriel, il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit d'un objet abstrait, mathématique,



et que les calculs que nous effectuerons ne doivent pas obligatoirement s'appliquer à quoi que ce soit de matériel. Ce sont juste de vecteurs.

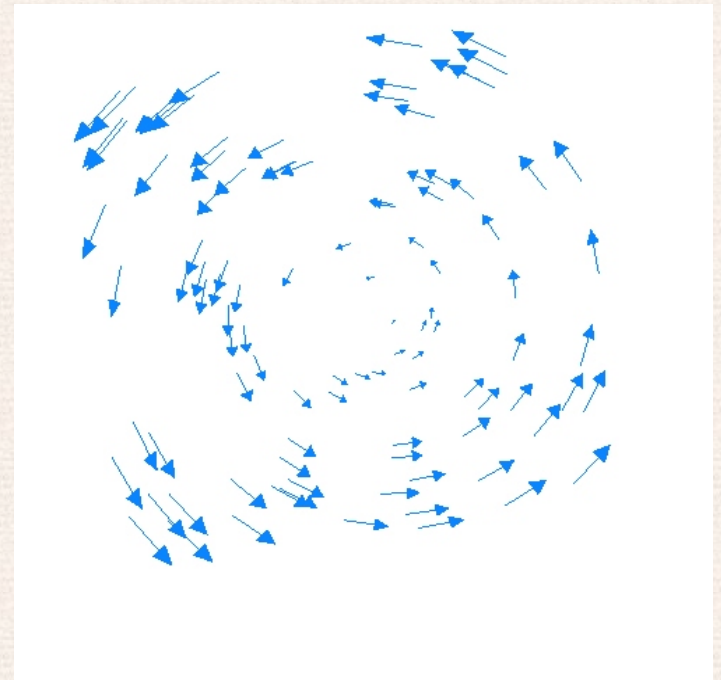
Je tiens à préciser ce point parce que si l'on prend comme analogie l'écoulement d'un liquide par exemple, le modèle devient trop restrictif parce que les liquides sont incompressibles. Et lorsque nous étudierons la divergence, cette incompressibilité que ne possède

pas à priori un champ vectoriel peut poser des problèmes de compréhension.

Bien entendu ces objets abstraits en fin de compte seront utilisés pour pour faire fonctionner des modèles censés représenter des entités concrètes. Il faudra juste trouver les bonnes équations les définissant.

Toutefois dans le cas de l'électromagnétisme, ces entités (champs électrique et magnétique) bien que concrètes (dans le sens « directement perceptible par les sens », ben oui, les rayons solaires, ça chauffe...) ne sont plus tout à fait vraiment matérielles, bien qu'indissociables de la matière et produites par la matière. Dans le cas de la physique quantique, il faut reconnaître que les équations subsistent mais que les entités et même les modèles posent problème à notre interprétation. Mais puisque les équations subsistent, continuons à les étudier en détail !

Afin de bien illustrer le fait que les vecteurs considérés ne doivent pas nécessairement être alignés (dans le cas d'un champ dans  $\mathbb{R}^2$  et non pas dans  $\mathbb{N}^2$  évidemment), voici une représentation du même champ vectoriel avec des vecteurs calculés pour des valeurs aléatoires des coordonnées  $(x, y)$ . Et bien entendu le nombre de points qui *peuvent* être pris en compte est infini comme l'est tout intervalle de réels dans  $\mathbb{R}$ . Dans certains cas on représente les vecteurs d'un champ vectoriel plus ou moins resserrés par endroit en précisant que cela donne une information supplémentaire sur l'objet physique étudié, mais alors



cela doit être... précisé dans la description (je pense par exemple à ce qui se fait couramment pour la représentation de « lignes de champ magnétique »).

**Question** : pourquoi les vecteurs (dans cet exemple) forment-ils des cercles ?

En fait ils ne forment pas particulièrement des cercles mais effectivement ils sont perpendiculaires aux rayons vecteurs (ou vecteurs positions ayant comme origine, pour chaque point de l'espace l'origine du repère, et comme extrémité le point considéré, qui forment un champ vectoriel). Voyons ça de plus près : Lorsqu'on entend parler de perpendicularité, on pense immédiatement au produit scalaire. Calculons donc le produit scalaire du vecteur position  $\vec{P}$  par le vecteur  $\vec{V}$  de cet exemple :

$$\vec{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{V} \begin{pmatrix} v_x = y \\ v_y = -x \end{pmatrix} = xy + y(-x) = xy - xy = 0$$

Le produit scalaire est nul, donc les vecteurs sont orthogonaux.

Notons aussi qu'un vecteur perpendiculaire à un rayon est tangent à un cercle qui passe par le point.

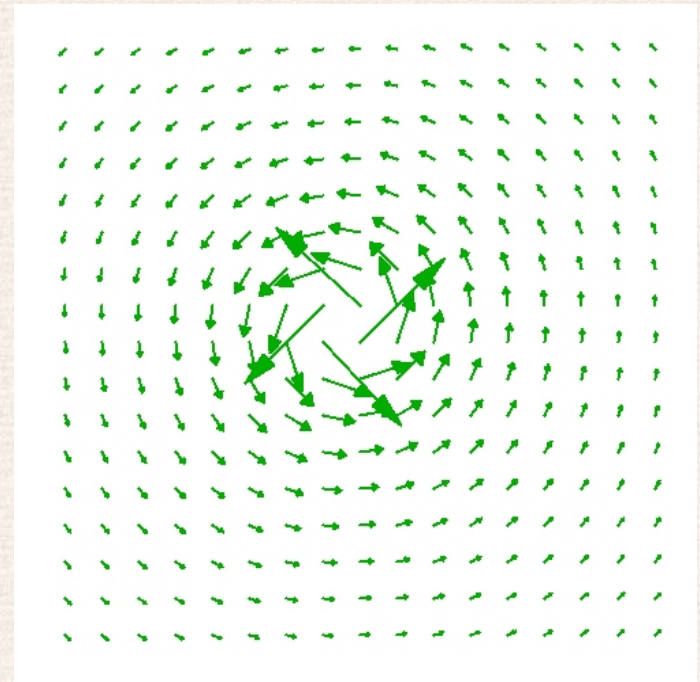


Autre exemple :

$$F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y) = \vec{V} \left( \begin{array}{l} v_x = \frac{y}{\text{abs}(x^2 + y^2)} \\ v_y = \frac{-x}{\text{abs}(x^2 + y^2)} \end{array} \right)$$

Maintenant les modules des vecteurs augmentent en se rapprochant du « centre ».



**exemple 2 :**

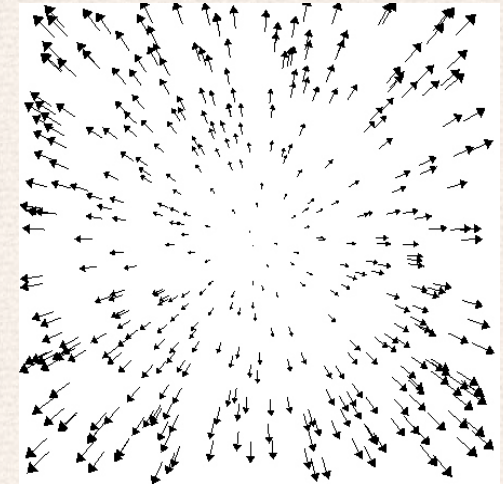
soit le champ vectoriel  $F$  défini dans le plan  $\mathbb{R}^2$  tel que :

$$F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y) = \vec{V} \left( \begin{array}{l} v_x = x \\ v_y = y \end{array} \right)$$

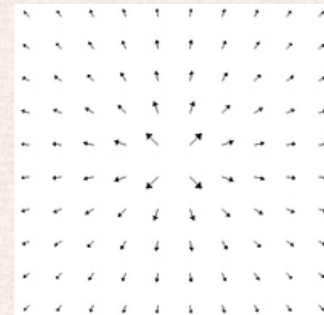
C'est le champ de vecteurs positions dont je vous ai parlé plus haut.

Les modules des vecteurs augmentent lorsqu'on s'éloigne du centre.



**exemple 3 :** Voici à peu près le même champ à ceci près que les modules des vecteurs augmentent lorsqu'on se *rapproche* du centre.

C'est un peu ce qui se passe dans le cas du champ électrique qui règne autour d'une particule chargée.



(J'ai aussi aligné les vecteurs pour changer un peu...)

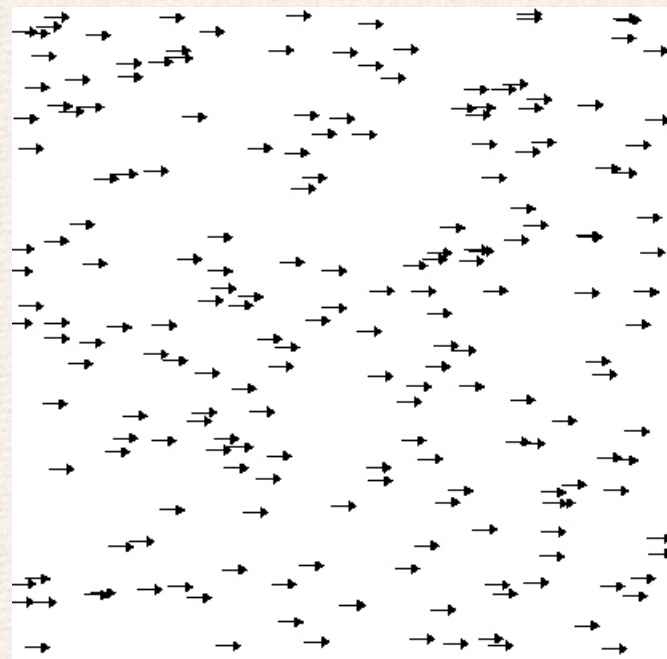
**exemple 4 :**

soit le champ vectoriel  $F$  défini dans le plan  $\mathbb{R}^2$  tel que :

$$F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$F(x, y) = \vec{V} \begin{pmatrix} v_x = 20 \\ v_y = 0 \end{pmatrix}$$

C'est un champ uniforme, constant, les vecteurs ont tous la même valeur en tout point.





## 2.2 Champs vectoriels dans l'espace $\mathbb{R}^3$

soit le champ vectoriel  $F$  défini dans l'espace  $\mathbb{R}^3$   
tel que :

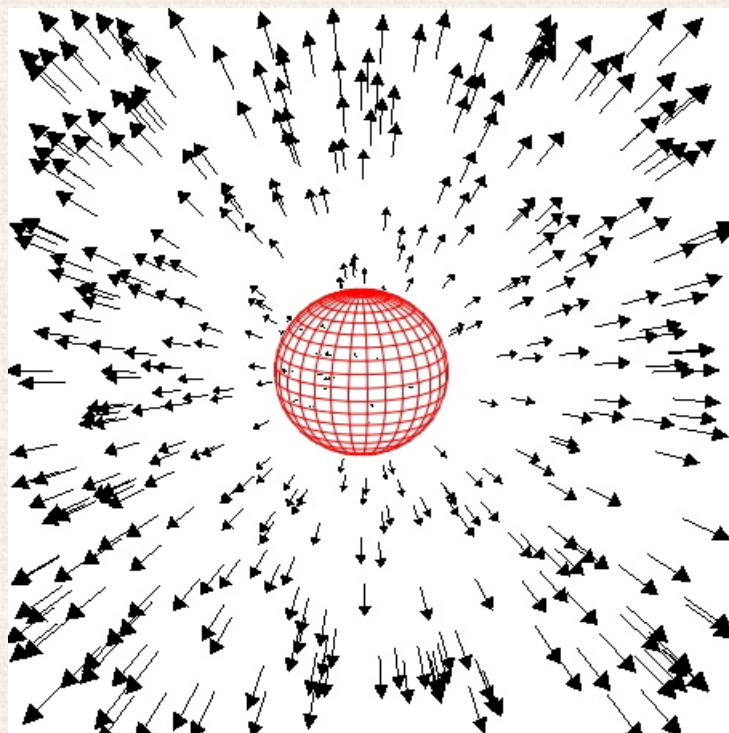
$$F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = \vec{V} \begin{pmatrix} v_x = x \\ v_y = y \\ v_z = z \end{pmatrix}$$

On ne peut plus simple.

La boule au centre n'a d'autre utilité que de  
montrer qu'il s'agit d'une vue dans l'espace.

Voilà un Big Bang qui devrait plaire à Hubert Reeves !



Nous commençons à nous faire une idée assez précise de ce qu'est un champ vectoriel.

### 2.2.1 Exemple concret de champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ : Le champ électrique

Nous savons que deux particules porteuses de charges électriques  $q_0$  et  $q_1$  s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une force proportionnelle au produit de leurs charges et inversement proportionnelle au carré de la distance  $r$  qui les sépare :

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0 \times q_1}{r^2} \vec{i} \quad (\text{dans le vide})$$

$\vec{i}$  est un vecteur unitaire orienté suivant la droite qui passe par les deux particules.

Remplaçons la charge  $q_1$  par une charge  $q_2$  placée à la même distance de  $q_0$ . On suppose que  $q_2$  n'est pas forcément égale à  $q_1$  mais qu'à part cela rien d'autre ne change.

Nous obtenons la force suivante que subiront les deux particules, donc en particulier  $q_2$

$$\vec{f}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0 \times q_2 \vec{i}}{r^2}$$

Si nous comparons les deux formules, nous voyons qu'une partie reste inchangée, c'est le produit  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0}{r^2}$  qui ne dépend que de la valeur de la charge  $q_0$  et de la distance à laquelle on se place par rapport à elle.

Tout se passe comme si la charge  $q_0$  produisait *quelque chose* dans l'espace qui l'entoure, qui ne dépend que d'elle et qui diminue suivant le carré de la distance.

C'est ce *quelque chose* que nous appelons le champ électrique. De quoi est-il fait ? D'un échange de photons virtuels nous dit la physique quantique. Est-il présent autour de  $q_0$  lorsqu'il n'y a pas de charge  $q_1$  ou  $q_2$  pour le détecter ? (et donc lorsqu'il n'y a pas de partenaire pour échanger les photons virtuels ?) En fait il n'y a pas de réponse à cette question puisque la question concerne justement le cas où il n'y a PAS de particule «sonde» permettant de connaître la réponse ! En effet pour détecter un champ électrique il faut utiliser une particule sensible à ce champ. Et alors on est plus dans le cas où il n'y a pas de charge à proximité. Toutefois la nature n'oublie jamais de placer le champ avec la bonne valeur lorsqu'on place une (ou plusieurs) particule à proximité. Donc on peut «faire comme si» le champ était toujours présent, on ne sera jamais démenti. Et ça tombe bien, cela correspond en tous points à notre définition d'un champ vectoriel (vectoriel et non scalaire parce que l'a force est orientée suivant la ligne droite « le rayon » qui joint les particules) : Le champ vectoriel se résume lui aussi à une (ou plusieurs) formule



mathématique qui permet de calculer la valeur d'un vecteur en n'importe quel point de l'espace lorsqu'on décide d'y placer ledit vecteur. Mais rien ne nous oblige à dessiner un nombre infini de vecteurs pour le représenter, ni d'effectuer le calcul pour tous les points de l'espace, la formule mathématique suffit, toujours prête à fournir la bonne valeur.

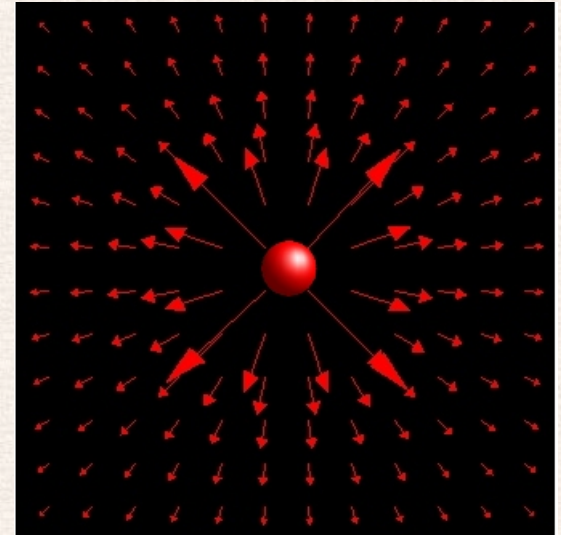
Nous noterons le champ électrique  $\vec{E}$  et sa valeur (pour des particules immobiles, dites « au repos ») est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_0 \vec{i}}{r^2}$$

Dés lors nous pouvons écrire la force (dans le cas de charges au repos) sous la forme :

$$\vec{f} = q \vec{E}$$

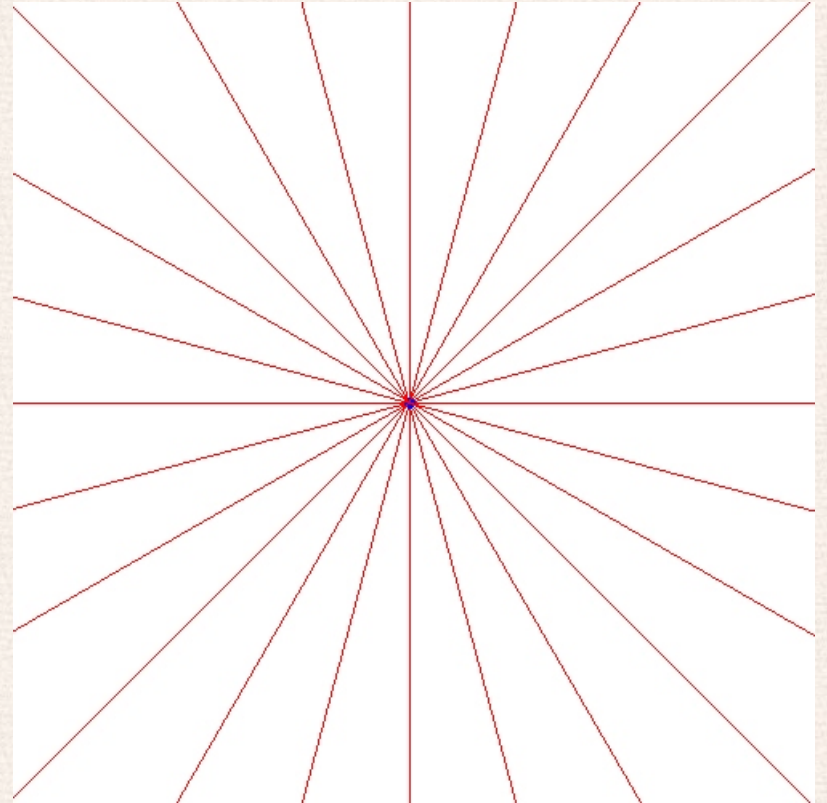
De la définition de  $\vec{E}$  nous déduisons que le champ électrique engendré par une particule unique (ou une charge considérée comme ponctuelle) est radial.



## Les lignes de champ :

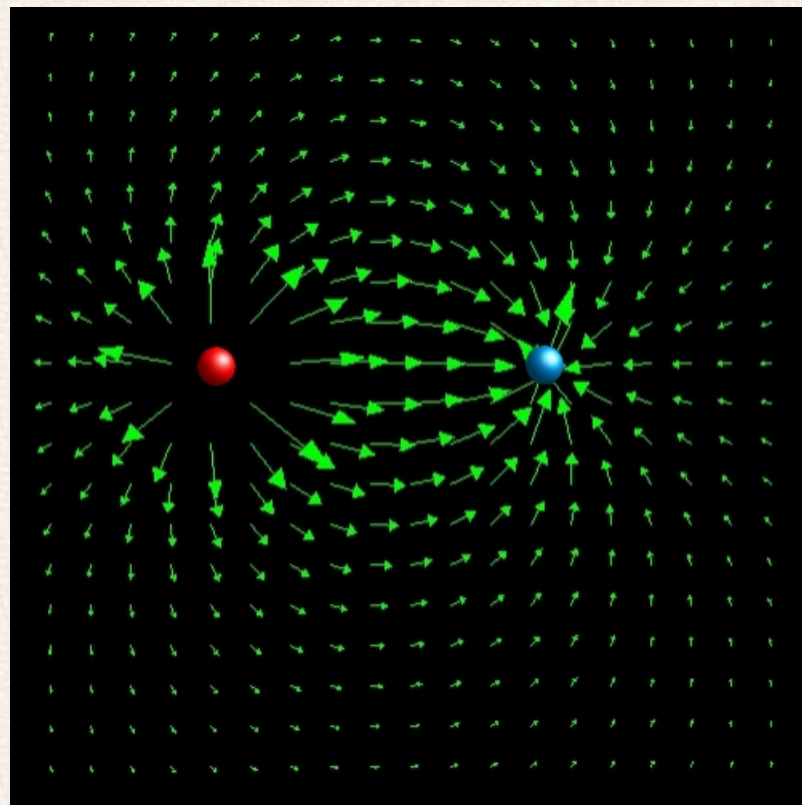
Les lignes de champ d'un champ vectoriel sont des lignes imaginaires qui sont en tout point tangentes aux vecteurs.

Dans le cas du champ électrique radial au voisinage d'une particule chargée (ou d'une charge considérée comme ponctuelle), les lignes de champ quittent la particule radialement, c'est à dire disposées comme les rayons d'une sphère centrée sur la particule.



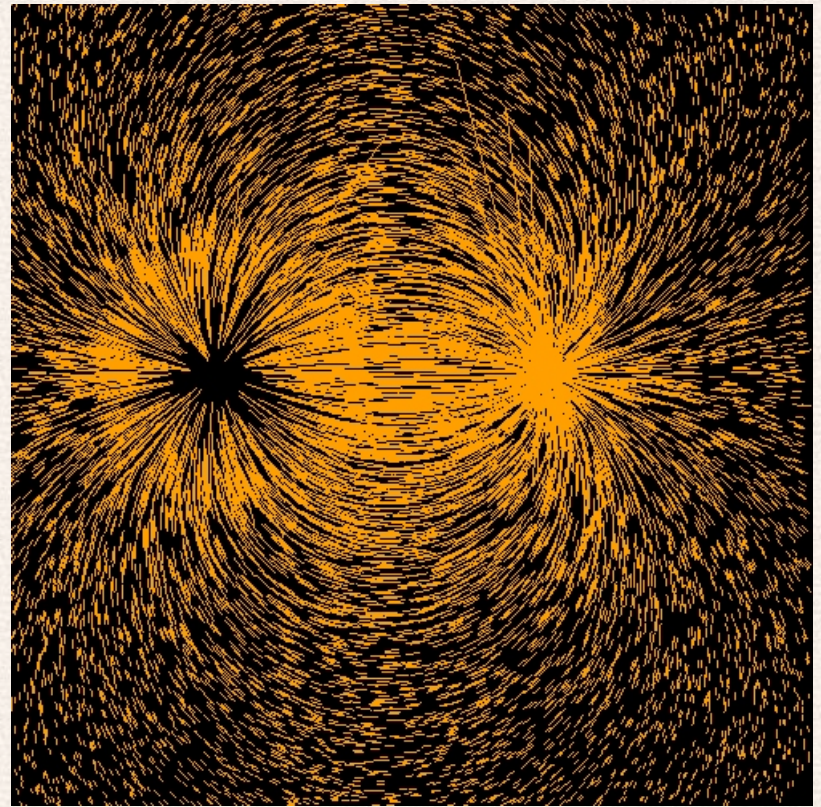
On démontre que si plusieurs charges sont présentes, leurs champs électriques en chaque point de l'espace s'additionnent (vectoriellement) et le résultat est nommé champ résultant. Il suffit alors de remplacer le champ  $\vec{E}$  dans la formule précédente par le champ résultant  $\vec{E}_R$  pour connaître la force que subira la particule soumise à l'action de plusieurs autres.

Voici par exemple le champ vectoriel que nous calcule l'ordinateur (en 2D pour plus de clarté) dans le cas de deux charges de signes contraires placées côte à côte. Le programme fait juste la somme de deux vecteurs correspondants respectivement au champ produit par la particule de gauche et à celui produit par la particule de droite, pour chaque point.





En augmentant quelque peu le nombre de vecteurs et en supprimant les pointes de flèches, on obtient quelque chose qui n'est pas sans rappeler les taches solaires.



Nous allons maintenant pouvoir démontrer pourquoi le champ décroît en  $1/r^2$  et d'où vient ce mystérieux  $\frac{1}{4\pi}$  qui accompagne  $\epsilon_0$ . Pour cela nous devons étudier certaines propriétés des champs de vecteurs, telle le flux, la divergence, la circulation et le rotationnel.

Maxwell, fais chauffer le café, on arrive !