Les Matrices

1 Définition

Une matrice $l \times c$ (l comme lignes et c comme colonnes) est un tableau rectangulaire d'éléments comprenant l lignes et c colonnes. ces éléments sont appelés *coefficients* ou *composantes* de la matrice. l et c sont les dimensions de la matrice.

$$\mathcal{M}_{l\,c} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1c} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{l\,c} \end{pmatrix}$$

Ces composantes peuvent être des nombres réels ou des complexes, voire des polynômes, ou des fraction rationnelles.

Voici un exemple d'une matrice 3×4 -> trois lignes et quatre colonnes

$$\mathcal{M}_{3,4} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ a_{21} & \alpha_{22} & a_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à l lignes et c colonnes et à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{R})$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme

On peut ajouter deux matrices $\mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{R})$ *de mêmes dimensions* termes à termes.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication par un scalaire externe

Pour multiplier une matrice par un scalaire externe, il suffit de multiplier chacun des termes par ce scalaire. Exemple :

$$3 \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -6 & 9 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

2.3 Produit matriciel

Là les choses se corsent...

Déjà il faut savoir des choses très importantes :

- on ne peut pas « multiplier » n'importe quelle matrice par n'importe quelle autre,
- le produit matriciel n'est pas commutatif. $\mathcal{M}1\mathcal{M}2 \neq \mathcal{M}2\mathcal{M}1$
- ce n'est **pas** le produit des coefficients terme à terme !

2.3.1 Calcul du produit matriciel

Pour que le produit matriciel de $\mathcal{M}1\mathcal{M}2$ soit défini, il faut que le nombre de colonnes de $\mathcal{M}1$ **soit égal** au nombre de lignes de $\mathcal{M}2$.

Par exemple si $\mathcal{M}1$ s'écrit $\mathcal{M}_{ab}$ alors il faut que $\mathcal{M}2$ s'écrive $\mathcal{M}_{bc}$ (notez l'indice b qui est partagé).

Pour effectuer le produit, il est commode de disposer les matrices $\mathcal{M}1$ et $\mathcal{M}2$ à multiplier de la façon suivante (la seconde en haut et à droite de la première) :

	$\mathcal{M}2$
$\mathcal{M}1$	résultat ici

exemple :

$$\mathcal{M}1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- la matrice $\mathcal{M}1$ ayant a lignes et b colonnes,
- la matrice $\mathcal{M}2$ ayant b lignes et c colonnes,

alors la matrice $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2$ aura a lignes et c colonnes.

Dans cet exemple $\mathcal{M}1$ est une matrice de format 3×2 , $\mathcal{M}2$ une matrice de format 2×4 , la matrice $\mathcal{M}1.\mathcal{M}2$ sera donc une matrice 3×4 (3 lignes et 4 colonnes).

Disposons ces deux matrices comme préconisé plus haut :

J'ai ajouté un petit tableau vide dans le « trou » en haut à gauche pour souligner le fait que ce trou est toujours carré (mesuré en nb d'éléments) puisque nb de lignes$(\mathcal{M}2)$ = nb de colonnes$(\mathcal{M}1)$. C'est un moyen simple de se rappeler cette condition.

$$\begin{array}{cc}
\begin{bmatrix} — & — \\ — & — \end{bmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & -14 & 7 & -16 \\ -8 & 13 & -9 & 12 \\ -10 & 15 & -5 & 20 \end{pmatrix}
\end{array}$$

ici le résultat est déjà affiché, toutefois il nous reste à apprendre à le calculer.

Rappel : Nous avons déjà étudié les vecteurs et nous savons que l'on peut les écrire de deux manières différentes :

$\vec{\boldsymbol{v}}(x, y)$ ou $\vec{\boldsymbol{v}}\binom{x}{y}$

Pour la première écriture on parle de « vecteur ligne » et pour la seconde de « vecteur colonne ». Nous savons également calculer le produit scalaire de deux vecteurs (en multipliant les composantes de même rang entre elles puis en faisant la somme de tous ces produits). Tout cela va nous servir pour calculer le produit matriciel.

Revenons donc à nos matrices.

Chaque composante du résultat est tout simplement égale au produit scalaire de deux vecteurs : un vecteur « ligne » et un vecteur colonne.

- le vecteur ligne c'est celui que l'on peut former avec la ligne de la matrice $\mathcal{M}1$ située à la même hauteur que la-dite composante à calculer.

- et le vecteur colonne c'est celui que l'on peut former avec la colonne de la matrice $\mathcal{M}2$ située à la verticale de la-dite composante.

Voyons en détail le calcul d'une composante du résultat (en rouge), en reprenant les matrices de l'exemple précédent :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}} & 0 \\ -2 & 3 & & 4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ \boxed{-2 \quad 3} & \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 9 & -14 & 7 & -16 \\ -8 & 13 & \boxed{\mathbf{-9}} & 12 \\ -10 & 15 & -5 & 20 \end{pmatrix}
\end{array}$$

la composante (-9), donc, est égale au produit **scalaire** du vecteur $(-2,3)$ avec le vecteur $\binom{3}{-1}$

Faisons le calcul : $\overrightarrow{(-2,3)}.\overrightarrow{(3,-1)} = (-2\times 3)+(3\times -1) = -6+(-3) = \mathbf{-9}$

Bien entendu il faut répéter ce calcul pour chacune des (ici douze) composantes.

Nous voyons que ces calculs de produits scalaires ne sont possibles que si le nombre de composantes figurant sur chaque ligne de $\mathcal{M}1$ est égal au nombre de composantes figurant sur la colonne correspondante de $\mathcal{M}2$, c'est à dire si le nombre de colonnes de $\mathcal{M}1$ est égal au nombre de lignes de $\mathcal{M}2$. Et c'est justement la condition que nous avions posée dès le départ.

On peut effectuer ces opérations sans prononcer le mot *vecteur*... Toutefois comme nous l'avons vu précédemment, les matrices peuvent représenter des applications linéaires entre des espaces vectoriels, donc les vecteurs ne sont jamais bien loin...

2.3.2 Mais d'où vient ce mode de calcul compliqué du produit matriciel ?

Est-il tombé du ciel ? non pas tout à fait. Nous avons dit lors de l'étude des matrices représentatives des applications linéaires que la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit matriciel de leurs matrices représentatives. Et ça non plus ce n'est pas par hasard que ça marche, c'est dû justement au fait que le produit matriciel a été conçu de telle sorte que ça marche ! En voici la démonstration :

soit l'application linéaire φ_1 :

$\varphi_1(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$ tels que $\begin{cases} y_1=a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2 \\ y_2=a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2 \end{cases}$

afin d'obtenir la composée de deux applications linéaires, supposons une seconde application linéaire φ_2 telle que (x_1,x_2) soit le résultat de la transformation de 2 autres variables (s_1,s_2)

$\varphi_2(s_1,s_2)=(x_1,x_2)$ tels que $\begin{cases} x_1=b_{11}\,s_1+b_{12}\,s_2 \\ x_2=b_{21}\,s_1+b_{22}\,s_2 \end{cases}$

Calculons le résultat (y_1,y_2)à partir des variables de départ (s_1,s_2)

$$\begin{cases} y_1=a_{11}\,(b_{11}s_1+b_{12}\,s_2\,)+a_{12}\,(b_{21}s_1+b_{22}\,s_2\,) \\ y_2=a_{21}\,(b_{11}s_1+b_{12}\,s_2\,)+a_{22}\,(b_{21}s_1+b_{22}\,s_2\,) \end{cases}$$

appelons $c_{...}$les coefficients :

$$\begin{cases} y_1=c_{11}\,s_1+c_{12}\,s_2 \\ y_2=c_{21}\,s_1+c_{22}\,s_2 \end{cases}$$

identifions ces coefficients $c_{...}$:

$$\begin{cases} c_{11}=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}\,,\,c_{12}=a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22} \\ c_{21}=a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}\,,\,c_{22}=a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{cases}$$

ces coefficients sont exactement ceux que l'on trouve si l'on fait le produit matriciel des deux matrices représentant $\varphi_1$etφ_2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Conclusion : Le produit matriciel a été inventé dans le but de pouvoir calculer le résultat de transformations linéaires appliquées en cascade. Et c'est ce qui en fait toute la puissance (par exemple en électronique, suite d'étages et de filtres sur le parcours du signal, ou en 3D suite de rotations appliquées à un objet, etc..)

2.4 Matrices particulières

2.4.1 Matrice carrée

C'est une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes :

exemple : $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée 3×3

2.4.2 Matrice identité notée $\boldsymbol{I_n}$

C'est une matrice **carrée** d'ordre n dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls sauf ceux d'indice a_{ii} (donc situés en diagonale) qui sont égaux à 1 , comme dans l'exemple suivant d'une matrice identité d'ordre 4 :

$$\boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice identité est l'élément neutre du produit matriciel, c'est à dire :

$\forall\ \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

Rappel : Pour que le produit matriciel de $\mathcal{M}1\mathcal{M}2$ soit défini, il faut que le nombre de colonnes de $\mathcal{M}1$ **soit égal** au nombre de lignes de $\mathcal{M}2$.

$\boldsymbol{A}$ est du format $m \times n$ donc $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I}_x$ n'est défini que si $x = n$

de même : $\boldsymbol{I}_x \boldsymbol{A}$ n'est défini que si $x = m$

Démonstration :

soit une matrice $\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & ... & .... & ... & \alpha_{1n} \\ .... & ... & a_{ij} & ... & ... \\ \alpha_{m1} & ... & .... & ... & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$

Calculons son produit matriciel avec la matrice $\boldsymbol{I}_n$ (ici un exemple avec $m = n = 3$, on peut extrapoler à d'autres valeurs...)

$$\mathbf{B}_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{i1} & a_{ij} & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mj} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{i1} & a_{ij} & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mj} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

disposons les matrices comme on l'a vu plus haut :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1j} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{i1} & a_{ij} & \alpha_{in} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{mj} & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & \beta_{ij} & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

calculons le coefficient β_{ij} (avec la méthode du produit scalaire de deux vecteurs comme vue plus haut)

$$\beta_{ij} = \overrightarrow{(\alpha_{i1}, \alpha_{\mathrm{ij}}, \alpha_{in})}.\overrightarrow{(0,1,0)} = \alpha_{i1} \times 0 + \alpha_{\mathrm{ij}} \times 1 + \alpha_{in} \times 0 = 0 + \alpha_{\mathrm{ij}} + 0 = \alpha_{\mathrm{ij}}$$

Nous voyons que tous les produits partiels s'annulent sauf celui concernant les mêmes emplacements (i, j) dans les deux matrices.

Comme cet emplacement peut être situé à priori n'importe où, nous en déduisons que tous les coefficients de la matrice résultat seront respectivement égaux à ceux de même emplacement dans la matrice de départ. Donc $\mathbf{B} = \mathbf{A}$

2.5 Déterminant d'une matrice

Le déterminant est utilisé en particulier pour inverser une matrice, comme nous le verrons plus tard. Il sert également à résoudre un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues. Il a de nombreuses autres applications.

2.5.1 calcul du déterminant d'une matrice 2×2

Soit la matrice 2×2 suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

recette : son déterminant est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Notez les barres verticales qui indiquent que nous avons affaire à un déterminant; c'est la raison pour laquelle il faut utiliser des parenthèses et non des barres verticales dans l'écriture des matrices.

2.5.2 calcul du déterminant d'une matrice 3×3

Soit la matrice 3×3 suivante : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

son déterminant est $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi)$

Je vous laisse parcourir ces lettres sur la matrice afin de comprendre leur ordre dans la formule (c'est la somme des produits des diagonales dans un sens MOINS la somme des produits des diagonales dans l'autre sens).

propriétés : Elles sont assez nombreuses, je citerai par exemple :

$\det(A \times B) = \det(A).\det(B)$

(Le déterminant du produit matriciel de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices).

Je vous donne des liens au bas de cette page afin d'approfondir la question.

Nous allons maintenant revenir à nos espaces vectoriels et aux applications linéaires avec des exemples qui feront forcément intervenir les matrices et leur déterminant...

3 Inversion d'une matrice carrée

3.1 Algèbre des matrices

Jusqu'à présent nous avons effectué des opérations entres des matrices et entre des matrices et des vecteurs, ce que l'on pourrait appeler de l'arithmétique des matrices. Mais peut-on faire de l'algèbre avec des matrices ? C'est à dire peut-on résoudre des équations avec des matrices comprenant une matrice inconnue dont il faut trouver les coefficients ?

3.1.1 Exemple classique

En algèbre classique on peut résoudre une équation comme :

$ax - b = 0$

x étant l'inconnue dont il faut trouver la valeur.

on connait la résolution :

$ax = b$

$x = \frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$

Peut-on résoudre des équations analogues faisant intervenir des matrices ?

Cela revient à résoudre :

$\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{B} = 0$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{X}$ étant des matrices, 0 étant ici la matrice nulle (dont tous les coefficients sont 0)

On peut effectivement le faire à un détail près :

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{BA}^{-1}$

Nous avons ici affaire à un produit vectoriel et a une matrice notée $\boldsymbol{A}^{-1}$ (attention, l'écriture $\frac{1}{A}$ n'existe pas , elle ne correspond à rien dans le monde des matrices).

Cette matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$ est appelée la matrice inverse de la matrice $\boldsymbol{A}$.

Reprenons l'équation avec $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$, où $\boldsymbol{I}_n$ est la matrice (carrée) *identité* d'ordre n, elle devient

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_n$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}$

c'est à dire : (en remplaçant $\boldsymbol{X}$ par sa valeur dans l'équation)

$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$

Cette dernière écriture constitue la définition de la matrice inverse :

3.1.2 Définition de la matrice inverse :

Si $\boldsymbol{A}_{n,n}$ est inversible il existe une matrice notée $\boldsymbol{A}^{-1}$, telle que :

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$
- $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$

(Ces deux égalités doivent êtres vérifiées)

- Pour qu'on puisse écrire le produit vectoriel $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}$, il faut que le nb lignes de $\boldsymbol{A}^{-1}$ soit égal au nb de colonnes de $\boldsymbol{A}$.
- Pour qu'on puisse écrire le produit vectoriel $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$, il faut que le nb lignes de $\boldsymbol{A}$ soit égal au nb de colonnes de $\boldsymbol{A}^{-1}$.
- Et si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$ le nb de lignes de $\boldsymbol{A}$ doit être égal à n et que le nb de colonnes de $\boldsymbol{A}^{-1}$ doit être égal à n.

Finalement on voit que $\boldsymbol{A}$ doit être une matrice **carrée** de dimension $n \times n$.

Ci-dessous le même raisonnement, représenté graphiquement pour $n = 3$:

$$\begin{array}{cc} \text{trou carré} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- en bas à gauche -> $\boldsymbol{A}$
- en haut à droite -> $\boldsymbol{A}^{-1}$
- en bas à droite -> $\boldsymbol{I}_3$ carrée

La seule possibilité est que $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^{-1}$ soient toutes deux des matrices carrées.

Toutes le matrices carrées ne sont pas inversibles. Lorsqu'une matrice carrée n'est pas inversible, elle est dite *singulière*.

3.2 Inversion d'une matrice :

Pour une matrice 2×2 le calcul est simple. Pour une matrice 3×3 le calcul est déjà beaucoup plus compliqué (pivot de Gauss par exemple, connue des Chinois depuis 2000 ans et en Europe depuis le XIX siècle...!), et pour des matrices d'ordre supérieur la complexité en nombre d'opérations élémentaires à effectuer augmente suivant les algorithmes en $O(n!)$ (factorielle n) ce qui nécessite un ordinateur, et encore pour des $n < 10$ environ, au delà le temps de calcul devient prohibitif. Plus grave, dans le cas de matrices dans $\mathbb{R}^n$ (dont les coefficients sont des nombres réels et non des entiers, ce qui est le cas le plus courant en pratique) les inévitables erreurs d'arrondis dans les calculs se cumulent et aboutissent rapidement à des résultats complètement faux et inutilisables, on va jusqu'à parler d'algorithmes instables. Toutefois certaines méthodes (assorties d'astuces) ont une complexité qui augmente moins vite, par exemple en $O(n^3)$ et permettent d'atteindre des $n < 100$ environ. Et l'ordinateur quantique... heu... non, pas encore, mais ça viendra.

3.2.1 Inversion d'une matrice $\mathbf{2 \times 2}$

soit une matrice 2×2

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

son déterminant est, rappelons le : $\Delta = ad - bc$

Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible et sa matrice inverse vaut :

$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (on voit pourquoi Δ doit être $\neq 0$)

(Les deux coefficients de la diagonale principale sont juste permutés, les deux autres restent en place en changeant de signe).

Comme annoncé, dans le cas d'une matrice 2×2 le calcul n'est pas compliqué.

3.2.2 Inversion d'une matrice 3×3

soit une matrice 3×3

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

On commence par construire la *matrice des mineurs* : C'est une matrice formée par les déterminants des sous matrices que l'on peut former à partir de la matrice $\boldsymbol{A}$

On va remplacer chaque élément de $\boldsymbol{A}$ par le déterminant formé à partir des éléments ne faisant PAS partie de la ligne NI de la colonne comprenant l'élément considéré.

Par exemple on va remplacer l'élément a par le déterminant formé par les éléments $\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$,

les autres étant ignorés : $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & b & c \\ d & \boxed{\begin{matrix} e & f \\ h & i \end{matrix}} \end{pmatrix}$

on remplace donc a par $\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = ei - fh$

et ainsi de suite...

voici donc cette matrice des mineurs :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ei-fh & di-fg & dh-eg \\ bi-ch & ai-cg & ah-bg \\ bf-ce & af-cd & ae-bd \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant former la *comatrice*, c'est à dire la matrice des *cofacteurs* :

pour cela on va multiplier chacun des éléments de la matrice des mineurs par les signes correspondants de cette matrice des signes : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

voici donc cette comatrice :

$$\begin{pmatrix} ei-fh & -(di-fg) & dh-eg \\ -(bi-ch) & ai-cg & -(ah-bg) \\ bf-ce & -(af-cd) & ae-bd \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant calculer le déterminant de la matrice de départ :

$\det(\boldsymbol{A}) = \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (aei+dhc+gbf)-(gec+ahf+dbi)$ comme vu plus haut (c'est un simple scalaire).

Il faut également calculer la transposée de la comatrice, c'est à dire la matrice obtenue en formant des lignes avec les colonnes (la première ligne devenant la première colonne et ainsi de suite...)

Voici donc la transposée de la comatrice :

$$\begin{pmatrix} ei-fh & -(bi-ch) & bf-ce \\ -(di-fg) & ai-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant écrire la matrice inverse de $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \times {}^{t}\mathrm{com}(\boldsymbol{A})$$

L'inverse de la matrice est égale à l'inverse du déterminant multiplié par la transposée de la comatrice.

Ce qui donne :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{aei+dhc+gbf-gec-ahf-dbi)} \times \begin{pmatrix} ei-fh & -(bi-ch) & bf-ce \\ -(di-fg) & ai-cg & -(af-cd) \\ dh-eg & -(ah-bg) & ae-bd \end{pmatrix}$$

C'est en général un ordinateur (ou un système physique, mais alors nous n'en voyons pas les équations !) qui le calculera. Toutefois la méthode doit être connue ne serait-ce que pour pouvoir programmer la fonction correspondante...

Je vous disais plus haut que le nombre d'opérations élémentaires à effectuer augmente en $O(n!)$ (factorielle n). Vu le nombre d'opérations requises pour cette simple matrice 3×3, on imagine ce que ça peut donner pour une 20×20 par exemple. Mais heureusement il y a les astuces...