Applications linéaires

1 Définition

Soit $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux espaces vectoriels

Soit φ une application qui fait correspondre aux éléments $v_1, v_2...$ de $\mathbf{A}$ des éléments $\varphi(v_1)$, $\varphi(v_2)...$ de $\mathbf{B}$. (que l'on appelle les images des éléments de $\mathbf{A}$ par l'application φ).

soit $\alpha_1, \alpha_2...$ des coefficients (scalaires)

φ est une application linéaire si l'on a :

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2) + ... + \alpha_n \varphi(v_n)$$

ou d'une manière plus concise :

$$\forall (v_1, v_2) \in \mathbf{E}^2 \ , \ \forall \lambda \in \mathbf{K} \ , \ \varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2)$$

1.1 endomorphisme, isomorphisme

Un isomorphisme de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{B}$ est une application linéaire bijective.

Une application linéaire de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ (d'un espace vectoriel dans lui-même) est appelée endomorphisme.

2 Où rencontre-t-on des applications linéaires ?

Les applications linéaires sont très courantes en mathématiques, par exemple :

- en géométrie vectorielle 2D ou 3D que nous avons survolé précédemment, les symétries, les projections, les rotations sont des applications linéaires.
- la dérivation et l'intégration de fonctions sont des applications linéaires.
- la transformée de Fourier (que nous avons survolée également) est une application linéaire.
- la transformée de Laplace (tiens, de ça aussi on a eu un aperçu).
- en analyse et traitement d'images, reconnaissance de forme : la convolution.

3 Représentation matricielle

3.1 constitution de la matrice représentative de φ

Soit deux espaces vectoriels $\mathbf{E}$ (de dimension n) et $\mathbf{F}$ (de dimension p)

Soit φ une application linéaire de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{F}$

$\varphi\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$

$\mathbf{E}$ a comme base les éléments $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$

$\mathbf{F}$ a comme base les éléments $\{f_1, f_2, \ldots, f_p\}$

L'application linéaire φ peut alors être représentée par une matrice $\mathbf{M}$ de n colonnes et p lignes

Voici à quoi ressemble cette matrice : les coefficients sont donc indicés $i\,j$ avec $i = 1\ldots p$ en vertical et $j = 1\ldots n$ en horizontal. Ces coefficients seront d'ailleurs écrits dans cet ordre, colonne par colonne.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1j} & \ldots & m_{1n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{i1} & \ldots & m_{i\,j} & \ldots & m_{i\,n} \\ \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{p1} & \ldots & m_{p\,j} & \ldots & m_{p\,n} \end{pmatrix}$$

3.2 calcul des coefficients de la matrice représentative de φ

Calculons maintenant ces coefficients.

Prenons l'image du vecteur e_1 de la base de $\mathbf{E}$, cette image est un donc élément de $\mathbf{F}$, qui s'écrit dans la base de $\mathbf{F}$:

$\varphi(e_1) = m_{11} f_1 + \ldots + m_{i1} f_i + \ldots + m_{p1} f_p$ -> ces coefficients seront ceux qui figureront dans la première colonne de la matrice.

nous avons de manière semblable l'image de e_j de $\mathbf{E}$ qui s'écrit :

$\varphi(e_j) = m_{1j}f_1 + ... + m_{ij}f_i + ... + m_{pj}f_p$

etc... jusqu'à l'élément e_n qui s'écrit :

$\varphi(e_n) = m_{1n}f_1 + ... + m_{in}f_i + ... + m_{pn}f_p$

Arrivé à ce stade nous avons rempli notre matrice. Dès lors elle nous servira à calculer l'image de n'importe quel élément de $\mathbf{E}$ par l'application linéaire φ dans $\mathbf{F}$.

3.3 Calcul des images des éléments avec cette matrice

Les éléments de $\mathbf{F}$ s'écriront :

soit v un élément de $\mathbf{E}$, calculons son image :

$v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_j e_j + ... + \alpha_n e_n$

on peut l'écrire en colonne (sous forme d'une matrice d'une seule colonne dite « matrice colonne » ou « vecteur colonne »):

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ a_j \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

son image dans l'espace vectoriel $\mathbf{F}$ par l'application linéaire φ sera égale au produit de la matrice $\mathbf{M}$ par ce vecteur colonne :

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ ... \\ \beta_j \\ ... \\ \beta_p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ a_j \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & ... & m_{1j} & ... & m_{1n} \\ .... & .... & ... & ... & ... \\ m_{i1} & ... & m_{ij} & ... & m_{in} \\ .... & ... & ... & ... & ... \\ m_{p1} & ... & m_{pj} & ... & m_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ a_j \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

Le nombre n de *colonnes* de la matrice (« sa largeur ») doit être égal au nombre n de *lignes* du vecteur (sa « hauteur »).

3.4 Propriétés des matrices représentatives des applications linéaires :

- la matrice d'une somme d'applications linéaires est la somme de leurs matrices.
- la matrice de la composée de deux applications linéaires est le produit de leurs matrices.
- la matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective est l'inverse de sa matrice.

Ces propriétés donnent toute la puissance des applications linéaires représentées par des matrices. Elles facilitent la manipulation et le traitement mathématique d'objets complexes dans les domaines déjà cités (imagerie numérique, traitement du signal, détection du signal dans le bruit) et bien d'autres (physique, mécanique quantique, théories de jauge, cryptographie, traitement d'images, calcul d'images de synthèse en 3D (OpenGL), projection 3D->2D, logiciels d'astronomie, jeu vidéo, etc, etc...)

Nous verrons quelques exemples concrets, mais avant cela il est temps de faire un détour par le calcul matriciel...

- Alors là, c'est sûr que ça va devenir compliqué !

- Mais non, pas du tout, c'est juste quelques recettes de cuisine, ça fait beaucoup moins appel à l'intuition que la résolution d'équations différentielles, par exemple.