

# Espaces vectoriels

## 1 Première approche

### 1.1 Comparaison avec les vecteurs de la géométrie

Nous avons vu précédemment ce qu'étaient les vecteurs et nous avons appris à les manipuler en leur appliquant des opérations mathématiques comme l'addition ou la multiplication par un scalaire. Nous avons vu qu'un vecteur est défini par ses composantes, deux pour les vecteurs du plan, trois pour les vecteurs dans l'espace.

Dans un premier temps nous avons considéré des vecteurs du plan comme ayant deux composantes représentant des déplacements dans le plan et les vecteurs dans l'espace trois composantes représentant des déplacements dans l'espace. Donc des composantes assimilables à des longueurs. Et nous avons représenté ces vecteurs sur un plan (dans le premier cas) orthonormé, c'est à dire dont le repère est constitué par des vecteurs unitaires perpendiculaires et de norme unité. Et cette unité était de toute évidence une unité de longueur. Le même type d'unité était donc utilisé pour les composantes des vecteurs et pour les vecteurs unitaires (ce qui est obligatoire et totalement intuitif) mais aussi pour le support graphique sur lequel on dessinait (plan).

En est-il toujours ainsi ? Non, et nous en avons eu un exemple avec des vecteurs à deux dimensions dont les composantes représentaient des vitesses. Et nous les avons tracés sur un plan... Ce plan composé de points de l'espace ne représentait donc non pas des points

de l'espace mais des vitesses et les vecteurs unitaires de la base étaient des vitesses. Nous avons donc créé une correspondance (bijection) entre deux type d'unités pour le besoin de la représentation graphique, des vitesses pour l'objet physique et des points d'un plan. Cela peut paraître trivial (c'est ce qu'on fait couramment lorsqu'on trace la courbe d'une fonction représentant une grandeur physique autre qu'une position dans l'espace, comme une température ou une tension électrique en fonction du temps).

Mais dans le cas des vecteurs cela peut prêter à confusion. En effet les vecteurs, de par leurs propriétés comme leur module (norme) et leur « direction » voire par les transformations algébriques qu'on peut leur faire subir dont certaines sont de « rotations », peuvent être confondus avec des objets géométriques ayant des longueurs et pouvant aussi subir des rotations. Mais alors que les figures géométriques ont une position dans l'espace les vecteurs n'en n'ont pas.

## 1.2 Le concept d'Espace Vectoriel

Le concept d'espace vectoriel est une généralisation de celui de vecteurs, mais il permet un bien plus grand degré d'abstraction tout en étant plus rigoureux de celui des vecteurs de la géométrie.

Nous avons vu en particulier que dans le cadre de la géométrie, la notion d'orthogonalité des vecteurs unitaires n'était pas toujours clairement définie. Dans le domaine des espace vectoriels, au contraire, la notion de base et de famille de vecteurs non liés (libres) la constituant ne se réfèrent pas à une représentation graphique, et gagne en... solidité sur le plan conceptuel (c'est bien, une base solide, non ?)



Les espaces vectoriels sont des ensembles d'objets mathématiques (comme l'ensemble des nombres réels, des complexes, des matrices, des fonctions, des solutions d'équations différentielles, ou des polynômes de degré inférieur à  $N$ ... beaucoup de choses donc, mais pas n'importe quel ensemble) munis de lois (opérations), **vérifiant certaines critères** (que nous allons préciser) et permettant des manipulations proches de ce qui se fait avec les vecteurs géométriques classiques, mais de façon abstraite en s'affranchissant de cette représentation graphique ambiguë. De fait les objets d'un espace vectoriel sont appelés des « vecteurs » parce que pouvant avoir plusieurs composantes, alors même qu'il peut s'agir de choses bien plus originales qu'un simple vecteur au sens géométrique du terme. Les opérations applicables à leurs éléments sont des applications linéaires, et la branche des mathématiques qui en découle s'appelle l'algèbre linéaire.

Remarque : Les vecteurs éléments d'un espace vectoriel seront représentés le plus souvent par des lettres minuscules et presque jamais avec une flèche dessus.

**Note 1.** Quelques notations mathématiques utilisées ici :

$\forall$  quel que soit (pour tout...)

$\in$  appartient à

$\exists$  il existe

$\exists!$  il existe un unique

$\subset$  est inclus dans

$\Rightarrow$  implique

$\Leftrightarrow$  équivaut à

## 2 Définition d'un Espace vectoriel

### 2.1 Les deux lois

Un espace vectoriel est un ensemble d'objets mathématiques similaires muni de deux lois :

- une loi d'addition des éléments entre eux (+)
- une loi de multiplication (.) des éléments par un scalaire extérieur à l'ensemble (ce scalaire peut être un nombre réel ou un nombre complexe).

### 2.2 Propriétés des deux lois

Soit  $\mathbf{E}$  un espace vectoriel.

#### 2.2.1 Loi (+)

La loi d'addition doit être interne à l'espace vectoriel, c'est à dire que si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $\mathbf{E}$  alors  $a + b$  doit aussi être élément de  $\mathbf{E}$ . ( $\mathbf{E}$  doit être stable pour la loi +)

$$\forall (a, b) \in \mathbf{E}^2, (a + b) \in \mathbf{E}$$

La loi (+) **doit** avoir un élément neutre et chaque élément doit avoir un élément symétrique pour la loi (+) appartenant à  $\mathbf{E}$ .

La loi (+) doit être associative  $(a + b) + c = a + (b + c)$

La loi (+) doit être commutative  $a + b = b + a$

**Loi (.)** (multiplication par un scalaire externe)

Soit  $\mathbf{E}$  l'espace vectoriel et  $\mathbf{K}$  l'ensemble des scalaires ( $\mathbb{R}$  (réels) ou  $\mathbb{C}$  (complexes))

$\forall(a) \in \mathbf{E}$  et  $\forall(\lambda) \in \mathbf{K}$  ,  $\lambda.a \in \mathbf{E}$

Par conséquent si l'on fait un combinaison linéaire d'éléments de l'espace vectoriel par les lois (+) et (.)

le résultat doit toujours se trouver dans cet espace vectoriel.

### 3 Quelques exemples d'espaces vectoriels (liste non exhaustive):

- Le plus simple : L'ensemble des réels muni de la loi + et . On écrira  $(\mathbb{R}, +, .)$
- L'ensemble des complexes  $(\mathbb{C}, +, .)$
- L'ensemble des polynômes  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$  noté  $(\mathbb{R}[x], +, .)$
- L'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n, noté  $(\mathbb{R}_n[x], +, .)$
- L'ensemble des  $n$ -uplets  $\mathbb{R}^n$  (remarque l'ensemble des triplets nous donne l'espace  $\mathbb{R}^3$  classique des vecteurs 3D)
- L'ensemble des fonctions continues.



## 4 Combinaison linéaire

Prenons deux éléments  $u_1$  et  $u_2$  d'un espace vectoriel  $\mathbf{E}$ . Ces éléments sont toujours appelés vecteurs bien qu'il puisse s'agir de choses diverses comme vu plus haut.

On appelle combinaison linéaire un élément qui peut s'écrire  $u = \lambda u_1 + \mu u_2$

ou d'une manière plus générale  $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$

## 5 Base d'un espace vectoriel :

Une base d'un ensemble vectoriel est une famille de vecteurs à la fois *libre* et *génératrice* (voir la définition de ces termes ci-dessous).

Tout vecteur de l'espace vectoriel s'obtient de façon **unique** par combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Un espace vectoriel donné possède en revanche une infinité de bases possibles. Elles ont toutes exactement le même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de l'espace vectoriel, noté  $\dim(\mathbf{E})$ .

La base dite « canonique » d'un espace vectoriel est la base qui semble *à priori* la plus simple.

## 5.1 Famille génératrice

Une famille de  $n$  vecteurs  $\in \mathbf{E}$  est dite génératrice de  $\mathbf{E}$  si tout élément de  $\mathbf{E}$  s'écrit comme une combinaison linéaire de ces  $n$  vecteurs.

## 5.2 Famille libre

Une famille est libre si aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres. c'est à dire que :

$$\forall (u_1, u_2 \dots u_n) \in \mathbf{E} \quad [\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0] \quad \Rightarrow \quad [\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0]$$

toute combinaison linéaire de ses vecteurs qui est nulle implique la nullité de tous les coefficients  $\lambda_n$ .

Image : Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension 3, qui peut parfois être représenté (suivant sa nature) comme l'espace  $\mathbb{R}^3$  habituel, ils ne doivent pas être « coplanaires »).

En reprenant l'exemple de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , les vecteurs de la base doivent-ils être « orthogonaux » ? Non, rien de *comparable* n'est obligatoire. D'ailleurs un espace vectoriel ne possède pas obligatoirement de produit scalaire ni de norme.

Oui, mais dans un espace vectoriel de dimension 2, assimilable à un « plan vectoriel », les vecteurs de la base doivent-ils être perpendiculaires ? Non, ce n'est ni obligatoire ni toujours défini puisqu'un espace vectoriel ne possède pas obligatoirement de produit scalaire ni de norme.

**Remarque** : Si une famille de vecteurs constitue une partie libre, alors leur nombre est inférieur ou égal à la dimension  $\dim(\mathbf{E})$ . Si ce nombre est égal à  $\dim(\mathbf{E})$ , alors cette famille est une base de  $\mathbf{E}$ . (Si ce nombre est  $< \dim(\mathbf{E})$ , alors on peut compléter la famille en y rajoutant des vecteurs libres, afin de rendre ce nombre égal à  $\dim(\mathbf{E})$ , afin d'obtenir une base de  $\mathbf{E}$ ).

**corollaire** : Si une famille comprend un nombre de vecteurs  $> \dim(\mathbf{E})$  alors elle n'est pas libre. (Elle peut tout à fait être génératrice de l'espace vectoriel, mais alors les vecteurs de cet espace ne s'écrivent pas de façon *unique* comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille).

## 6 Dimension de l'espace vectoriel (de type fini) :

C'est le nombre d'éléments (vecteurs) de la base, noté  $\dim(\mathbf{E})$ . Il n'est défini que pour les espaces vectoriels de type fini (nous verrons plus tard cette notion d'espaces vectoriels finis ou infinis).