Calcul vectoriel

1 Vecteurs

1.1 Définition géométrique dans le plan

Note. Nous raisonnerons ici dans un plan euclidien orthonormé, c'est à dire dont les vecteurs formant le repère cartésien $(0; \vec{i}, \vec{j})$ sont de module =1 et sont perpendiculaires. (autrement le théorème de Pythagore ne s'applique pas). Dans le cadre Relativité Générale ou de la Gravité Quantique à Boucles, les choses ne sont pas aussi simples !

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ un vecteur est un opérateur qui permet de passer d'un point A à un point B.

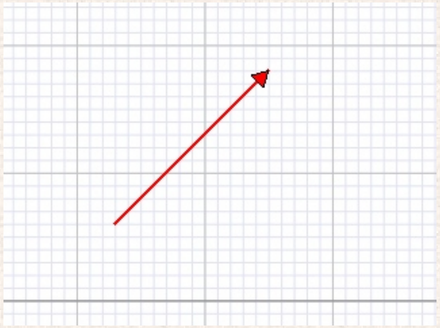
Il peut donc être définit par ces trois éléments :

– une direction à suivre
– un sens
– une longueur à parcourir (c'est le « module » ou la « norme » du vecteur)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $x0y$, on peut aussi le définir par deux composantes :

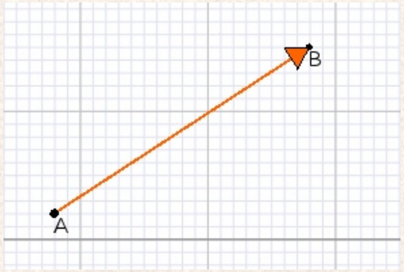
- la distance à parcourir dans la direction x (c'est la composante x, obtenue en traçant une droite parallèle à l'axe des y et coupant l'axe des y).
- et la distance à parcourir dans le sens y (c'est la composante y, obtenue en traçant une droite parallèle à l'axe des x et coupant l'axe des x).

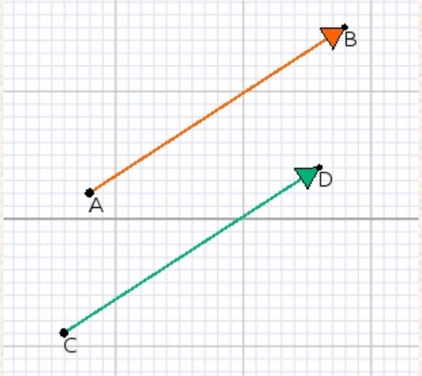
Dans un repère orthonormé, les axes sont



Il est commode de représenter un vecteur par une flèche dont la longueur représente le module, orientée dans la bonne direction. Mais attention : le vecteur, au contraire de la flèche, n'a pas de position définie dans le plan (plus généralement dans l'espace). Dans ses constituants (module et direction, *ou* composantes_x et composante_y) rien n'indique un endroit particulier de l'espace.

Dans le cas d'un vecteur considéré dans le cadre de la géométrie euclidienne, dans un plan orthonormé, c'est un opérateur (de translation) qui peut être appliqué à n'importe quel point du plan pour aboutir un autre point (qui est, lui, situé à une position précise par rapport au premier). On peut ainsi tracer la flèche entre ces deux points. On dit que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.





Mais le vecteur, lui, n'est pas attaché à ces positions. Par exemple sur la figure ci-contre, le vecteur qui translate A en B est exactement le même que celui qui translate C en D. Le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ se contente de dire « pour obtenir l'image d'un point, il faut se déplacer de deux pas à droite et d'un pas et demi vers le haut » ou encore « se déplacer de telle distance dans telle direction et tel sens». C'est tout. On voit que les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ « disent » la même chose. On écrira $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ $=\overrightarrow{\mathbf{CD}}$. Et dès lors, $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$ sont indiscernables sur le plan algébrique, c'est le même vecteur.

1.1.1 Notations

on écrira le vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ de composantes x et y de plusieurs manières :

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$ (deux lettres représentant deux points) ou $\vec{\mathbf{V}}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right|$ ou $\vec{\mathbf{V}}(x, y)$ ou bien encore $\vec{v}$ (une lettre en minuscule et pas toujours la lettre *v*). En fait on trouve un peu de tout suivant les auteurs, ce qui semble assez constant c'est la flèche au dessus, (mais pas toujours, dans le cadre de l'algèbre linéaire des espaces vectoriels on n'utilise en principe pas la flèche).

1.1.2 Vecteur nul

Le vecteur nul est noté $\vec{\mathbf{0}}$, il a comme composantes $\vec{\mathbf{0}}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right|$

remarque : $\overrightarrow{\mathbf{AA}} = \vec{\mathbf{0}}$

C'est la translation de vecteur nul qui aboutit au point de départ.

1.1.3 Vecteur opposé :

Si le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ décrit la translation du point A au point B, son opposé est le vecteur qui décrit la translation du point B au point A.

On l'obtient en changeant le signe de chacune de ses composantes, c'est à dire en prenant l'opposé algébrique des composantes.

On écrira $-\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}$

si on a : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\left|\begin{array}{c}\mathrm{Ax}\\ \mathrm{Ay}\end{array}\right|$ alors $-\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}\left|\begin{array}{c}-\mathrm{Ax}\\ -\mathrm{Ay}\end{array}\right|$

Attention : Ne jamais dessiner la flèche au dessus de la lettre dans l'autre sens (de la droite vers la gauche) sinon bonjour les erreurs de calculs !

1.2 Opérations de base dans le plan $\mathbb{R}^2$

1.2.1 Somme (addition) de deux vecteurs dans le plan

La somme de deux vecteurs a pour résultat un vecteur dont les composantes sont les sommes respectives des composantes des vecteurs.

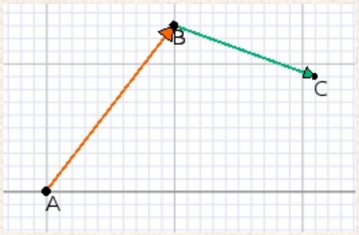
$\vec{i}\ \mathrm{et}\ \vec{j}$ étant les vecteurs unitaires de la base, nous avons :

$$\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}\left|\begin{matrix} A_x \\ A_y \end{matrix}\right| + \vec{\mathbf{B}}\left|\begin{matrix} B_x \\ B_y \end{matrix}\right| = \vec{\mathbf{C}}\left|\begin{matrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \end{matrix}\right|}$$

Voyons ça de plus près :

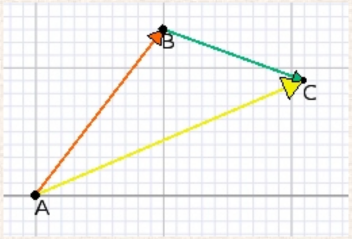
On peut se déplacer dans le plan en allant de A à B, puis une fois en B aller en C. Ces deux déplacements peuvent êtres définis par deux vecteurs, le premier précisant la marche à suivre pour se rendre de A en B, et le second pour se rendre de B en C. En fin de course nous sommes allés de A en C. On peut donc utiliser un troisième vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ décrivant la marche à suivre pour aller de A en C. Certes le trajet n'est pas le même, mais le déplacement total est le même, « se rendre de A en C». Nous dirons que le déplacement total est la somme des deux déplacements, et donc que le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$.



Nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}$

C'est la relation de Chasles.



Remarquons la lettre commune (B) au milieu, qu'il suffit de supprimer pour obtenir la somme.

Dans le cas de translations de points dans le plan, les composantes du vecteur doivent être au nombre de deux, permettant de préciser un déplacement suivant l'axe des x et un déplacement suivant l'axe des y, ou bien une distance à parcourir et une direction. Donc deux quantités concernant un même phénomène.

Il vient donc naturellement à l'idée qu'un vecteur pourrait alors représenter autre chose qu'une translation, quelque chose possédant également deux composantes. Et c'est le cas de... beaucoup de choses en physique. C'est le cas par exemple d'une vitesse (dérivée d'une distance / temps) qui possède (dans le cas d'un déplacement sur un plan) :

– une composante suivant l'axe des x

– une composante suivant l'axe des y

et qui peut aussi être décrite par :

– un module (le nombre de mètres par seconde)

– une direction (angle + un sens)

1.2.2 Somme d'un vecteur et de son vecteur opposé

La somme d'un vecteur et de son vecteur opposé donne le vecteur nul:

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} + (-\overrightarrow{\mathbf{AB}}\ ) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BA}}=\overrightarrow{\mathbf{AA}} = \vec{\mathbf{0}}$

en composantes :

$\vec{\mathbf{V}}(x,y)+(-\vec{\mathbf{V}}(-x,-y))=\vec{\mathbf{S}}(x+(-x),y+(-y))=\vec{\mathbf{S}}(x-x,y-y)=\vec{\mathbf{0}}(0,0)$

1.2.3 Différence de deux vecteurs

Pour obtenir la différence de deux vecteurs il suffit de faire la somme du premier par le vecteur opposé du second :

$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ - $\overrightarrow{\mathbf{CD}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \left(-\overrightarrow{\mathbf{CD}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{DC}}$

en composantes cela revient à faire les soustractions respectives des composantes en x et en y :

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}\left|\begin{array}{c} A_x \\ A_y \end{array}\right| - \vec{\mathbf{B}}\left|\begin{array}{c} B_x \\ B_y \end{array}\right| = \vec{\mathbf{C}}\left|\begin{array}{c} A_x - B_x \\ A_y - B_y \end{array}\right|}$$

$[A_x\vec{i}+A_y\vec{j}\ ]-[B_x\vec{i}+B_y\vec{j}]=(A_x-B_x)\vec{i}+(A_y-B_y)\vec{j}$

1.2.4 Multiplication par un scalaire

c'est à dire par un nombre réel « ordinaire » qui n'est donc pas un vecteur :

$\lambda.\vec{v}\left|\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right| = \vec{w}\left|\begin{array}{c} \lambda x \\ \lambda y \end{array}\right|$ (en utilisant des petites lettres pour changer un peu et s'habituer...)

$\lambda[x\vec{i}+y\vec{j}] = \lambda x\vec{i}+\lambda y\vec{j}$

1.2.5 Somme de deux vitesses

Nous choisissons cet exemple de la vitesse parce qu'il est proche du précédent, tout en permettant de préciser certaines choses concernant les vecteurs. Nous verrons par la suite des exemples bien plus déconcertants comme une amplitude et une phase, ou des nombres complexes.

Prenons l'exemple d'un planeur : en air calme sans ascendances ni turbulences et sans toucher aux commandes de vol (vol stabilisé), il se déplace avec une vitesse constante tout en perdant peu à peu de l'altitude (ce qui lui procure l'énergie pour continuer à planer). Sa vitesse peut se décomposer comme suit :

– une composante verticale dirigée vers le bas, de faible valeur (si tout va bien...)
– une composante horizontale qui représente son déplacement par rapport au sol.

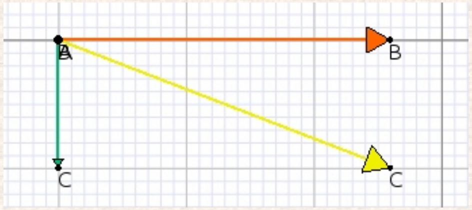
Je ne vous cacherai pas que le quotient des deux s'appelle la « finesse », mais peu importe.

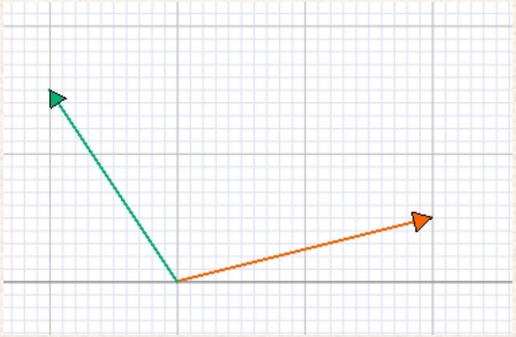
La vitesse de son déplacement dans l'air est égale à la somme de ces deux composantes. Pareillement à ce que nous avons vu tout à l'heure dans le cas des translations ? Pas tout à fait. Car pour calculer la somme des deux vecteurs dans le cas de la translation, nous les avions mis bout à bout. Mais cette fois ces deux composantes semblent concerner le même point.

Comment faire leur somme ? Calculons en distances parcourues en un temps donné. Par exemple au bout d'une minute le planeur aura parcouru une distance horizontale égale à sa vitesse horizontale $\times$ par 1 minute. (vitesse = distance / temps, donc distance = vitesse $\times$ temps). Il aura aussi parcouru une distance verticale égale à sa vitesse verticale $\times$ 1 minute.

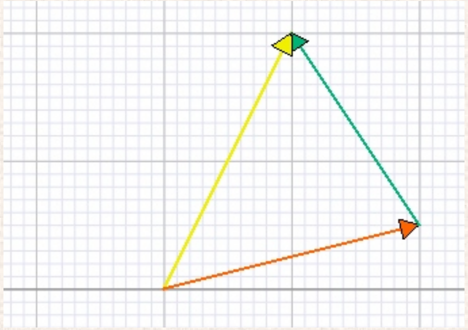
Ces deux distances sont proportionnelles aux vitesses correspondantes, elle peuvent être représentées par des vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ dont les modules sont proportionnels aux modules des vecteurs représentant les vitesses. Et comme il s'agit maintenant de déplacements... on peut les dessiner bout à bout afin d'obtenir le déplacement total, qui peut être donc représenté par le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$. Et puisque cette distance totale a été parcourue elle aussi pendant une minute, nous en déduisons que la vitesse totale est proportionnelle au module du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

Cet exemple nous montre que l'endroit où l'on dessine un vecteur n'a pas vraiment d'importance, ce dernier dessin avec les vecteurs mis bout à bout est équivalent à celui-ci :



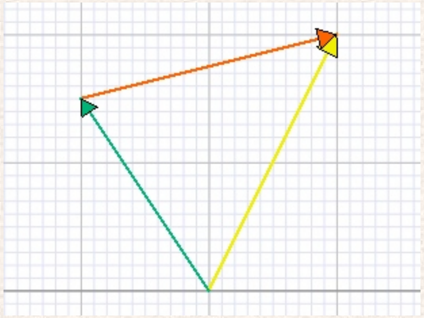


D'une manière générale, lorsqu'on veut additionner « graphiquement » deux vecteurs, on peut les disposer de plusieurs façons. Soit par exemple à additionner le vecteur rouge et le vecteur vert :



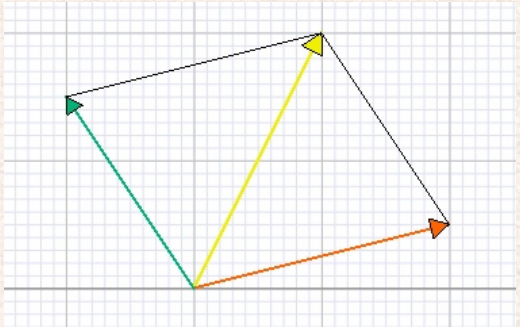
on peut placer le vert à l'extrémité du rouge

(le jaune étant la somme des deux)



ou bien placer le rouge à l'extrémité du vert

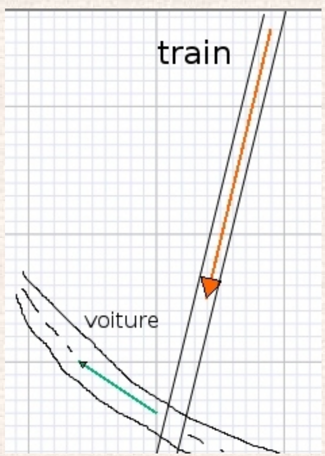
(regardez bien le jaune : c'est le même que celui de la figure précédente, ce qui montre que l'ordre dans lequel on effectue les translations n'a pas d'importance)



ou bien encore tracer le « parallélogramme des vecteurs » ce qui revient à tracer les deux figures précédentes à la fois. Dans le cas des translations, cette représentation est moins intuitive (nous avons l'habitude de n'emprunter qu'un chemin à la fois), mais dans le cas des vitesses qui sont effectives simultanément, le dernier tracé est plus parlant.

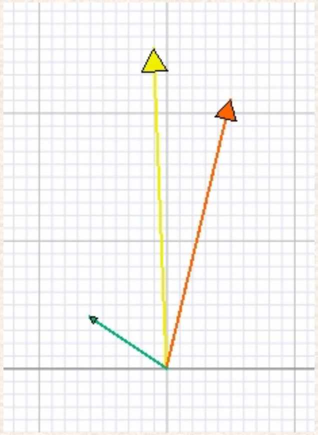
Il s'agit de trois fois la même chose, les vecteurs ne « codent » pas pour une position. Un autre exemple devrait maintenant nous en convaincre.

Considérons un train qui approche d'un passage à niveau (ouvert parce que le train est encore un peu loin). Sur la route qui coupe la voie ferrée au passage à niveau vient de passer une voiture avec une vitesse par rapport au sol bien différente en module et en direction à celle du train. Tout ceci dans un même plan (d'où cette image du passage à niveau plutôt que d'un pont pour décrire des trajectoires séquentes. Restons dans un plan). Soit à calculer la vitesse de la voiture par rapport au train. C'est la différence vectorielle des vitesses. Nous savons maintenant le faire.



Mais ce qui est intéressant c'est de remarquer que nous allons effectuer la différence de deux vecteurs qui ne sont pas « reliés » au même objet, ni au même endroit de l'espace. Et pourtant nous pouvons les dessiner ayant la même origine pour en faire la différence.

Voici donc le dessin obtenu. On voit que dans ce cas de figure le module obtenu est un peu plus grand que celui de chacune des vitesses.



Comme nous avions vu dès le départ que tous les vecteurs parallèles et de même modules étaient équivalents, indiscernables, il nous a suffit de considérer en permanence deux vecteurs dessinés comme ayant même origine, chacun d'eux étant à tout instant équivalent à ceux qu'on attribuaient au train ou à la voiture.

En conclusion le fait que les vecteurs n'aient pas de position définie dans l'espace leur donne une grande puissance de calcul, ou du moins cela permet de simplifier grandement les calculs. Et partant cela ouvre la porte à une utilisation dans des domaines plus abstraits comme par exemple l'amplitude et la phase d'un signal (temporel ou spatial, ou un peu des deux dans le cas des ondes qui évoluent dans l'espace et dans le temps).

1.2.6 Norme (ou module) du vecteur

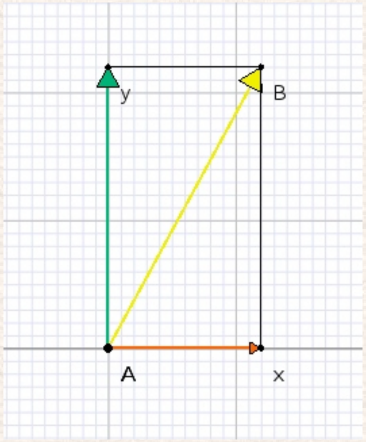
La norme du vecteur est la distance séparant les points A et B lorsque le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$. En clair c'est la longueur de la flèche.

On la note $\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\|$

Comment la calculer à partir des composantes en x et y ?

Note. Nous raisonnerons ici dans un plan euclidien orthonormé, c'est à dire dont les vecteurs formant le repère $(0;\vec{i},\vec{j})$ sont de module =1 et sont orthogonaux. (autrement le théorème de Pythagore ne s'applique pas).

Soit le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ de composantes A_x et A_y



Le repère étant orthonormé, l'ensemble de la figure est un rectangle, donc nous pouvons écrire, concernant les longueurs du côté xB :

$\mathrm{xB} = A_y$

De plus nous avons un (même deux, mais un suffira) triangle rectangle AxB dont l'hypoténuse est AB. Le théorème de Pythagore s'applique donc :

$\mathrm{AB}^2 = {A_x}^2 + \mathrm{xB}^2$ (dans le triangle AxB)

en remplaçant yB et xB par leurs valeurs vues plus haut, nous obtenons :

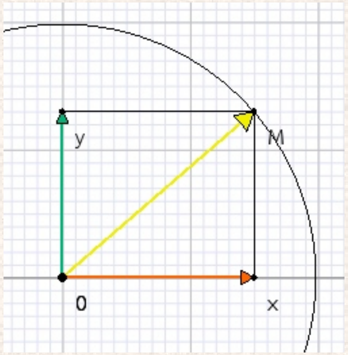
$\mathrm{AB}^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2$

donc : $\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\| = \mathrm{AB} = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$

on utilisera aussi cette forme :

$\|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\|^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2$

1.2.7 Expression des composantes en fonction du module et de l'angle



soit le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Traçons le vecteur dans un cercle trigonométrique ayant pour rayon le module OM , et appelons α l'angle entre la direction du vecteur et l'axe des x. Les composantes s'expriment alors ainsi :

$x = \mathrm{OM}\cos\alpha$

$y = \mathrm{OM}\sin\alpha$

$\frac{y}{x} = \frac{\mathrm{OM}\sin\alpha}{\mathrm{OM}\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$ -> $\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

Remarque :

$x^2 + y^2 = M^2\cos^2\alpha + M^2\sin^2\alpha = M^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

et comme : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$x^2 + y^2 = M^2 = \left\|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right\|^2$

Nous retrouvons ainsi le résultat précédent.

1.2.8 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Le produit scalaire de deux vecteurs a pour résultat ***un scalaire*** (un nombre, pas un vecteur):

On le note par un point (et pas par le signe $\times$ qui est utilisé pour le *produit vectoriel*)

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \;=\; A_x B_x + A_y B_y$$

$$(A_x \vec{i} + A_y \vec{j}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j}) = A_x B_x + A_y B_y$$

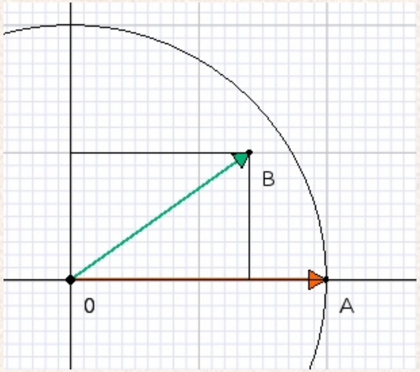
$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \left| \begin{array}{l} A_x \\ A_y \end{array} \right. \cdot \vec{\mathbf{B}} \left| \begin{array}{l} B_x \\ B_y \end{array} \right. = A_x B_x + A_y B_y}$$

Question : Quand le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ est-il nul (si $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ ne sont pas nuls) ?

Si on fait le calcul direct avec des composantes quelconques, les choses ne sont pas simples, mais...

Astuce : On a vu que les propriétés des vecteurs ne dépendent pas de l'endroit où on les dessine puisque cet endroit est totalement arbitraire. Ce qui signifie qu'on peut les dessiner où cela nous arrange, en particulier par rapport aux axes du repère du plan. Ou dit autrement on peut placer les axes où l'on veut, et orientés comme on veut. Il en va de même pour le calcul du produit scalaire qui ne dépend pas du choix des axes de référence mais uniquement des propriétés *relatives* des composantes des deux vecteurs.

D'où l'idée de choisir de dessiner un des vecteurs sur l'axe des x pour simplifier les calculs.



Traçons le cercle (trigonométrique)

Projetons le second vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ sur les axes.

Appelons A le module de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (pour alléger l'écriture) $A = \left\|\overrightarrow{\mathbf{OA}}\right\|$

Appelons B le module de $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $\qquad B = \left\|\overrightarrow{\mathbf{OB}}\right\|$

Les composantes des vecteurs deviennent :

$\overrightarrow{\mathbf{OA}}\left| \begin{matrix} A \\ 0 \end{matrix} \right|$

$\overrightarrow{\mathbf{OB}}\left| \begin{matrix} B\cos\alpha \\ B\sin\alpha \end{matrix} \right|$ avec α l'angle relatif entre les deux vecteurs (qu'on a pris soin de conserver)

donc nous avons :

$A_x = A$

$A_y = 0$

$B_x = B\cos\alpha$

$B_y = B\sin\alpha$

Ré-écrivons notre produit scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= A_x B_x + A_y B_y \\ \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= A \times B\cos\alpha + 0 \times B\sin\alpha \\ &= A\,B\cos\alpha \end{aligned}$$

On voit que ce produit scalaire s'annule pour $\cos\alpha = 0$ c'est à dire

pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

Autrement dit :

Le produit scalaire est nul lorsque les vecteurs sont orthogonaux.

Ce résultat peut être utilisé pour démontrer l'othogonalité de deux vecteurs dans un espace vectoriel déjà muni d'une base orthonormée.

Retenons aussi que le produit scalaire a pour valeur :

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \|\vec{\mathbf{A}}\|\;\|\vec{\mathbf{B}}\|\;\cos a$$

Remarque : le premier point désigne le produit scalaire, les deux autres désignent le produit « ordinaire » dans $\mathbb{R}$.

ATTENTION : ce résultat n'est valable que dans un plan affine euclidien orthonormé, c'est à dire dont les vecteurs formant le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ sont de module =1 et sont orthogonaux. (autrement le théorème de Pythagore ne s'applique pas).

Remarque : Dans certains livres de math, dans la définition d'un repère orthonormé il est dit :

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont normés $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux $\vec{i}.\vec{j} = 0$

Ce qui me semble tautologique : Le fait de se servir de la nullité du produit scalaire des vecteurs de la base (seconde ligne -> $\vec{i}.\vec{j} = 0$) pour démontrer ensuite que le produit scalaire de deux vecteur est nul...

Il convient donc de définir autrement l'orthogonalité des vecteurs unitaires de la base, par exemple comme ceci : deux droites séquentes sont orthogonales lorsqu'elles forment un angle droit. Bien. Heu... C'est quoi un angle droit ?

En voici une définition qui ne fait **pas** appel (à première vue) au produit scalaire ni à une quelconque « forme bilinéaire » qui cache la même chose :

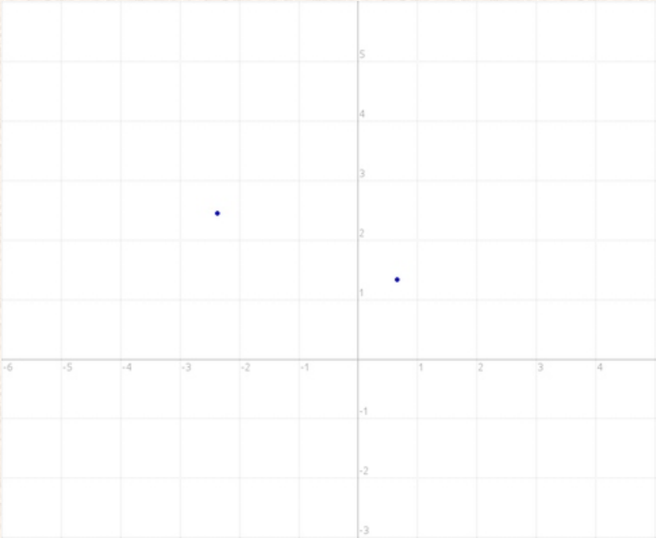
Dans le plan euclidien, deux droites sécantes définissent quatre angles deux à deux égaux. Lorsque ces quatre angles sont tous égaux, chacun forme un angle droit. Les droites sont alors dites perpendiculaires.

Mais si on cherche la petite bête on pourrait se demander « comment mesure-t-on un angle » et quel serait le résultat de cette mesure dans chacun des 4 quadrants d'un repère non-orthonormé ? Je veux dire par là que lorsqu'on parle des 4 angles égaux, on se réfère *implicitement* à un repère orthonormé *par dessus lequel* on trace notre figure avec les deux droites ! D'ailleurs les premiers mots de l'énoncé « *Dans le plan euclidien* » auraient dû nous alerter : En effet dans la définition du plan euclidien on trouve... le produit scalaire (!) et la notion d'orthogonalité (si le produit scalaire de deux vecteurs est nul(!!)

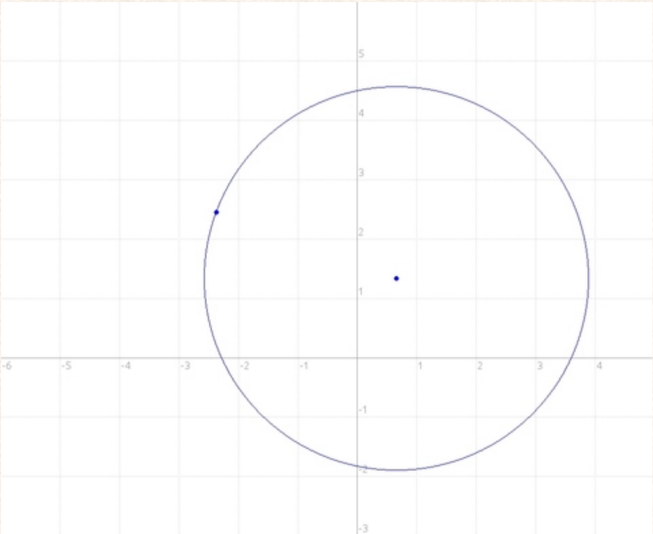
Je propose tout autre chose, avec une règle et un compas:

Considérons 4 points du plan équidistants les uns des autres(obtenus en traçant des cercles). Traçons un quadrilatère sur ces 4 points, on obtient un losange (oui un losange, pas forcément un carré qui est une espèce particulière de losange ayant un angle droit, on ne sait pas encore ce qu'est un angle droit, on veut le définir). Traçons les deux diagonales de ce losange : elle se coupent à angle droit. Voilà on a notre angle droit. Les droites perpendiculaires obtenues offrent une symétrie bien particulière (chacune des 4 demi-droites est symétrique de son autre moitié par rapport à l'autre droite).

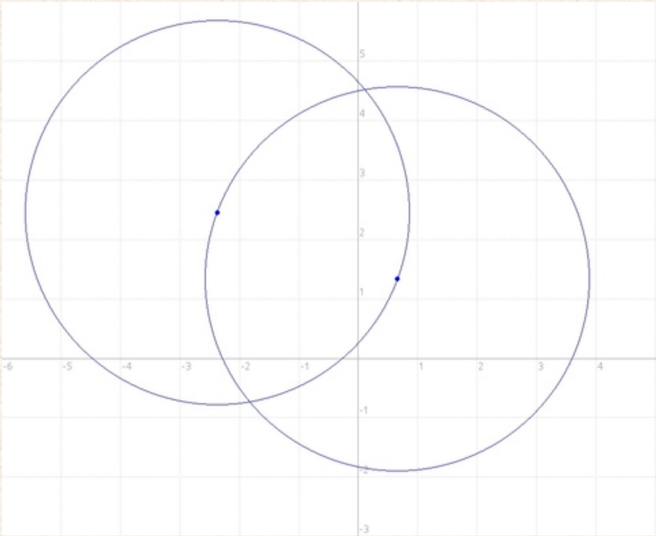
Voici la procédure détaillée, en images. (Remarque : tout écolier connaît cette méthode - Quant au fond quadrillé et gradué, il est fait par mon logiciel de dessin, on l'oublie, il n'existe pas ! Au départ on prend une feuille blanche, une règle, un compas, et c'est tout).



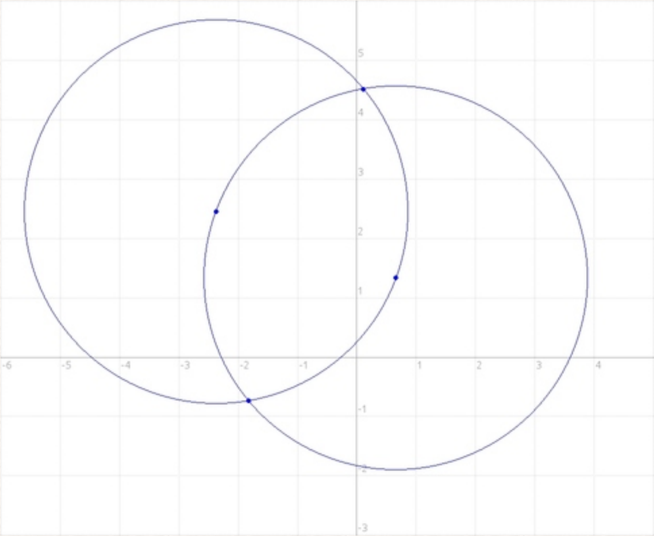
1) plaçons 2 points sur le plan



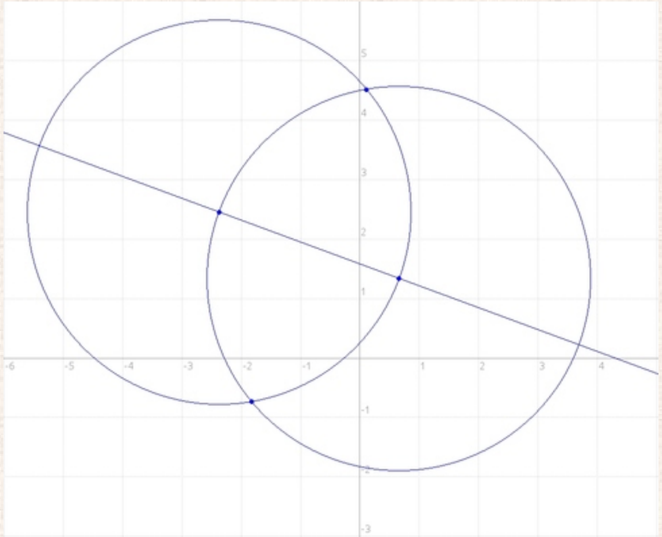
2) traçons 1 cercle centré sur l'un d'eux



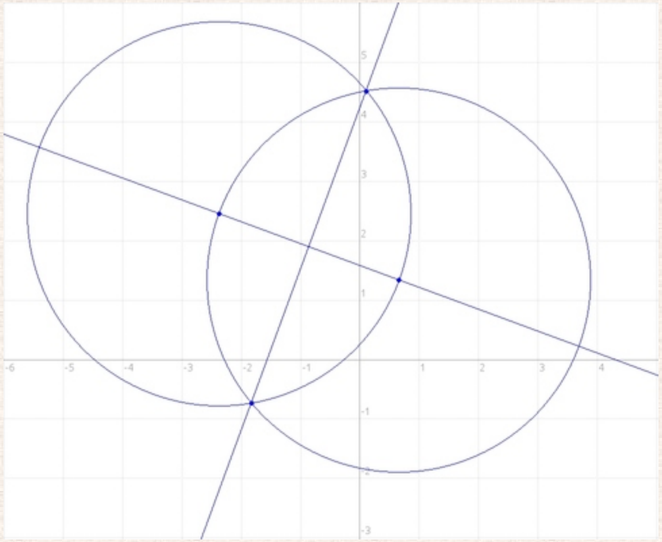
3) puis un 2^{eme} cercle de même rayon sur l'autre



4) ils se coupent en 2 autres points



5) traçons 1 droite passant par les centres



6) puis une 2^{eme} droite passant par les intersections

A partir de là, au compas, nous pouvons tracer les vecteurs unitaires, de modules égaux, de notre base orthonormée. Et hop on peut continuer. Définir le produit scalaire et tout ce qui s'ensuit.

On a juste supposé :

-que le plan est bien « plat »

-que le compas ne se déforme pas lorsqu'on mesure des distances dans des directions différentes.

-que la règle est bien droite, et qu'on sait donc définir ce qu'est une ligne droite en l'absence de repère (le trajet d'un rayon de lumière ? aie ! loin de toute masse alors)

-que la notion de distance a bien un sens dans un plan qui n'est pas encore muni de repère (le temps mis par la lumière pour parcourir cette distance ?)

-que par deux points il ne passe qu'une seule droite...

Sachons qu'il existe effectivement des géométries s'appliquant à des espaces non euclidiens (géométrie Riemannienne), que traite la relativité générale, et qui concernent la topologie de l'espace en présence de masses.

1.2.9 Quelques propriétés fondamentales des opérations vues plus haut

Elles nous permettrons de définir les *Espaces vectoriels*

Toutes ces propriétés peuvent être démontrées sans difficulté en faisant les calculs sur les composantes des vecteurs.

- **associativité** de l'addition vectorielle (elle découle directement de l'associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$):

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

- **commutativité** de l'addition (elle découle directement de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$):

$(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{v} + \vec{u})$

- **élément neutre** pour l'addition :

c'est le vecteur nul.

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

- **élément opposé** pour l'addition :

$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

- **distributivité de la multiplication par un scalaire** par rapport à l'addition vectorielle :

$\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

1.3 Vecteurs dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Note 1. Nous raisonnerons ici dans un espace euclidien orthonormé, c'est à dire dont les vecteurs formant le repère cartésien $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont de module =1 et sont orthogonaux. (autrement le théorème de Pythagore ne s'applique pas).

Ainsi en géométrie, nous considérerons le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ de composantes A_x, A_y, A_z dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de base orthonormée :

on notera :

$\vec{\mathbf{A}}\left|\begin{matrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{matrix}\right|$

soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs constituant la base orthonormée (ils sont donc non coplanaires, leur module est égal à 1, ils sont orthogonaux deux à deux)

Nous pouvons écrire :

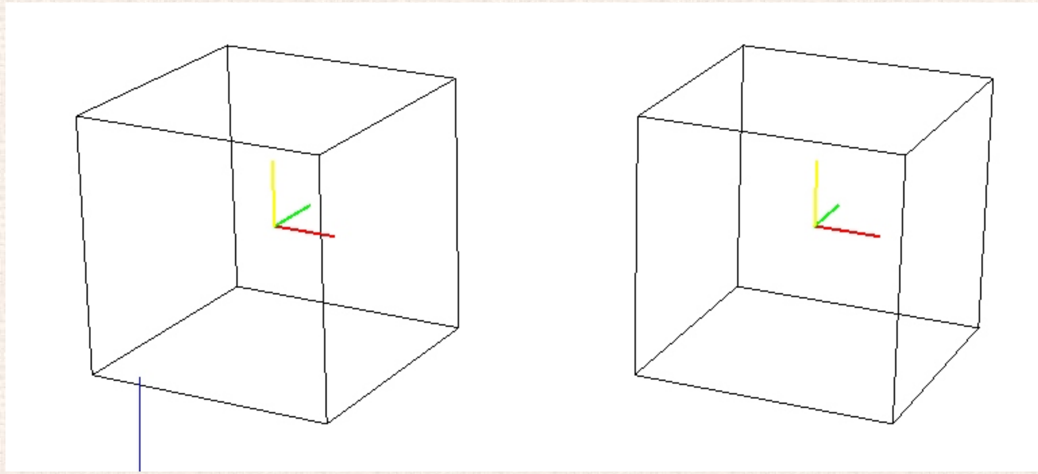
$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$$

Remarque à propos des termes « orthogonal » et « perpendiculaire »: ce n'est pas la même chose.

En 3D, par un point donné extérieur à une droite il passe une seule perpendiculaire à cette droite passant par ce point. Il existe par contre une infinité de droites orthogonales qui ne sont pas forcément perpendiculaires entre elles (exemple : les différentes arêtes du cubes qui ne sont pas séquentes). On réservera en général le terme « perpendiculaire » pour les droites du plan $\mathbb{R}^2$.

Nous serons par la suite amenés à manipuler des vecteurs dans des espaces vectoriels dont le module des vecteurs unitaires de la base ne représenteront pas des distances ou des vitesses, mais des accélérations, des champs électriques ou magnétiques, ou des signaux sinusoïdaux (qui comportent une amplitude et une phase ou une amplitude et une fréquence...), des nombres complexes, voire l'espace des solutions d'équations différentielles, puis à considérer des espaces vectoriels de dimensions supérieures ou inférieures à 3. (Un espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle, un espace vectoriel de dimension 2 un plan vectoriel). Tant que l'espace vectoriel ne comporte pas plus de trois dimensions, il est simple d'en visualiser les vecteurs sous forme d'un tracé géométrique ou d'une image en relief stéréoscopique (générée par exemple par un ordinateur), au delà ça se complique. Il faudra se contenter d'effectuer des calculs sur les composantes, avec par exemple des matrices. Mais un ordinateur fait çà très bien. Les objets quantiques et donc la nature aussi du reste !

Voici un exemple de vue stéréoscopique générée par un petit programme que j'ai écrit en C++ et Qt4 :

à regarder en louchant »	

2 Opérations de base dans l'espace $\mathbb{R}^3$

2.1 Addition de vecteurs dans l'espace

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}}\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} + \vec{\mathbf{B}}\begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{C}}\begin{vmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{vmatrix}}$$

2.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs a pour résultat ***un scalaire*** (un nombre, pas un vecteur):

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \;=\; A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\boxed{\mathbf{A}\left|\begin{array}{c}A_x\\A_y\\A_z\end{array}\right|\cdot\mathbf{B}\left|\begin{array}{c}B_x\\B_y\\B_z\end{array}\right|=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

En ce qui concerne le vecteur nul, le vecteur opposé, et la multiplication par un scalaire, voir plus haut leurs équivalent pour les vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Nous allons maintenant décrire une opération (le produit vectoriel) qui n'a pas d'équivalent dans le plan $\mathbb{R}^2$:

2.3 Produit vectoriel dans l'espace $\mathbb{R}^3$

2.3.1 Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs, défini dans l'espace $\mathbb{R}^3$, a pour résultat ***un vecteur*** :

$$\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}} \;=\; \vec{\mathbf{C}}$$

$$\boxed{\text{On note aussi (en France) } \vec{\mathbf{A}}\wedge\vec{\mathbf{B}}}$$

ayant pour composantes :

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x \end{aligned}$$

$(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \wedge (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$

$$\boxed{\vec{\mathbf{A}} \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} \wedge \vec{\mathbf{B}} \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{C}} \begin{vmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{vmatrix}}$$

Ce vecteur résultat du produit vectoriel est **orthogonal à chacun des vecteurs** de départ.

Remarque : dans le cube représenté plus haut en 3D figurent trois petits segments : Le jaune représente le vecteur issu du produit vectoriel du rouge par le vert (tous de module unité dans cet exemple).

Note. Le produit vectoriel n'est pas défini dans un espace de dimension 2 (plan). Certes il s'opère entre deux vecteurs coplanaires, mais le résultat s'exprime dans la troisième dimension, perpendiculaire au plan des vecteurs.

2.3.2 Expression du produit vectoriel en fonction du module et de l'angle :

Remarque1 : concernant deux vecteurs : Soit trois points quelconques A,B,C dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Ils définissent un plan, ils sont donc forcément coplanaires (ce plan n'est à priori pas parallèle à $x0y$ ni à $x0z$ ni à $y0z$).

Plaçons l'origine en un des points, par exemple en C. Nous avons donc les points 0, A, et B

Les points 0 et A permettent de définir un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ dont l'origine serait en 0 et l'extrémité en A, orienté de 0 vers A et de module égal à la distance OA.

Les points 0 et B définissent un autre vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ dont l'origine serait en 0 et l'extrémité en B, situé dans le même plan que $\vec{\mathbf{A}}$ puisque les trois points 0,A,B sont toujours coplanaires.

Donc deux vecteurs tracés avec la même origine sont toujours coplanaires.

Remarque2 : comme nous l'avons vu plus haut un vecteur n'est pas lié à un point, il n'est défini que par ses composantes ou par son module et son orientation. En conséquence deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ peuvent toujours être représentés avec des flèches ayant une origine commune.

On définit parfois le produit vectoriel comme étant le vecteur orthogonal au plan formé par les deux vecteurs considérés (et orienté dans le sens direct*) et dont le module est égal au produit des modules et de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

(*) [Wikipedia:] Par convention le sens direct correspondant au vissage d'une vis ou d'un tire-bouchon. La base $(\vec{i}\,, \vec{j}\,, \vec{k})$ est dite directe si, en tournant de $\vec{i}$ vers $\vec{j}$ avec un angle positif, la vis ou le tire-bouchon parcourt l'axe donné par $\vec{k}$ dans le sens croissant.

Montrons l'équivalence avec la définition par les composantes :

Traçons les vecteurs dans leur plan commun vu ci-dessus et orientons le repère sur ce plan et l'un des vecteurs :

Dans ce système de coordonnées les composantes deviennent :

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}}\left|\begin{array}{c} A \\ 0 \\ 0 \end{array}\right|$$

(Le module de $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ est à l'évidence $|A|$)

$$\overrightarrow{\mathbf{OB}}\left|\begin{array}{c} B\cos\alpha \\ B\sin\alpha \\ 0 \end{array}\right|$$ avec α l'angle relatif entre les deux vecteurs.

Le module de $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ est :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{\mathbf{OB}}\| &= \sqrt{(B\cos\alpha)^2+(B\sin\alpha)^2+0^2} \\ &= \sqrt{B^2\cos^2\alpha+B^2\sin^2\alpha} \\ &= \sqrt{B^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)} \\ &= \sqrt{B^2}=|B| \end{aligned}$$

Les composantes en z sont nulles puisque les vecteurs sont par hypothèse tracés dans le plan $x0y$

Calculons le produit vectoriel :

Rappel :

$$\vec{\mathbf{A}}\left|\begin{array}{c} A_x \\ A_y \\ A_z \end{array}\right| \wedge \vec{\mathbf{B}}\left|\begin{array}{c} B_x \\ B_y \\ B_z \end{array}\right| = \vec{\mathbf{C}}\left|\begin{array}{c} A_yB_z-A_zB_y \\ A_zB_x-A_xB_z \\ A_xB_y-A_yB_x \end{array}\right|$$

ce qui donne dans le cas présent :

$$\vec{\mathbf{A}}\begin{vmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \vec{\mathbf{B}}\begin{vmatrix} B\cos\alpha \\ B\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{\mathbf{C}}\begin{vmatrix} 0\times 0 - 0\times B\sin\alpha \\ 0\times B\cos\alpha - A\times 0 \\ A\,B\sin\alpha - 0\times B\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\mathbf{C}}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ A\times B\times\sin\alpha \end{vmatrix}$$

Nous voyons que le produit vectoriel est un vecteur de composantes x et y nulles, et de composante en $C_z = A\times B\times\sin\alpha$

Le module de C_z est $\sqrt{0^2+0^2+(A\times B\times\sin\alpha)^2} = A\times B\times\sin\alpha$

Conclusion :

$$\boxed{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)}$$

Question : Quand le produit vectoriel est-il nul (si $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ ne sont pas nuls) ?

Le produit vectoriel s'annulle lorsque $\sin\alpha$ = 0

c'est à dire lorsque $a = 0 + k\pi$ (lorsque les vecteurs sont colinéaires).

2.3.3 Quelques propriétés du produit vectoriel

- produit vectoriel d'un vecteur par lui-même :

$$\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} A_y A_z - A_z A_y \\ A_z A_x - A_x A_z \\ A_x A_y - A_y A_x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

- produit mixte nul :

$$\vec{\mathbf{A}}.(\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}) = \begin{vmatrix} A_x(A_y B_z - A_z B_y) \\ A_y(A_z B_x - A_x B_z) \\ A_z(A_x B_y - A_y B_x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x A_y B_z - A_x A_z B_y \\ A_y A_z B_x - A_y A_x B_z \\ A_z A_x B_y - A_z A_y B_x \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Forts de ces bases sur les vecteurs nous pouvons maintenant aborder les espaces vectoriels (avec des exemples en théorie du signal...) puis les champs de vecteurs (et le calcul différentiel qui les concerne) ce qui en définitive nous permettra d'étudier les lois de l'électromagnétisme (en particulier les équations de Maxwell) et le rayonnement électromagnétique.

- boudiouuu c'est pas simple !

-pour l'instant si ! c'est après que ça va se gâter...