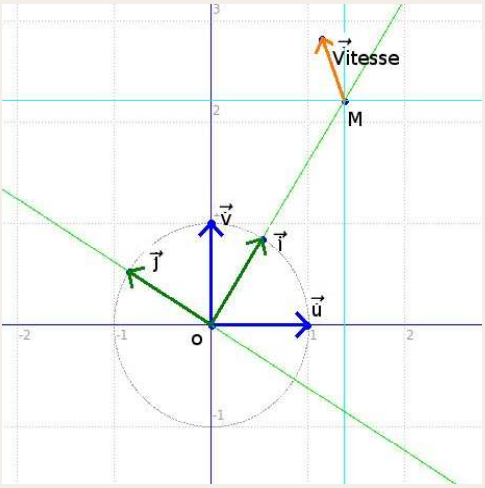
RAPPEL DE CINEMATIQUE

1 Vitesse et accélération d'un point matériel dans un plan

Soit M un point matériel se déplaçant dans un plan de repère orthonormé $O\,\vec{u}\,\vec{v}$



Associons au point M le vecteur $\overrightarrow{OM}$

de module r et d'argument θ

$$\begin{aligned} r &= |\overrightarrow{OM}| \quad \text{(longueur)} \\ \theta &= \text{angle entre } \overrightarrow{OM} \text{ et } \vec{u} \text{ (en radian)} \\ \dot{\theta} &= \frac{d}{dt}\theta = \omega \qquad \text{(en radian/seconde)} \\ \overrightarrow{OM} &= r\,[(\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{v}] \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OM}$ est appelé le « rayon vecteur »

Associons au point M le **repère cartésien orthonormé tournant** $M\,\vec{i}\,\vec{j}$ tel que $\vec{i}$ soit à tout instant colinéaire avec le rayon vecteur (radial) et $\vec{j}$perpendiculaire au rayon vecteur (ortho-radial) (certains disent coordonnées polaires, mais ces dernières définissent la position avec un angle et une distance).

Remarque : On notera les dérivées avec un point au dessus de la lettre : $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$

1 Relations entre les deux systèmes de coordonnées :

$$\begin{aligned} \vec{i} &= (\cos\theta)\vec{u} + (\sin\theta)\vec{v} \\ \vec{j} &= -(\sin\theta)\vec{u} + (\cos\theta)\vec{v} \end{aligned}$$

1.1 Nous en déduisons que :

$$\frac{d}{dt}\vec{i} = \dot{\theta}\,\vec{j}$$

démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= -\dot{\theta}(\sin\theta)\vec{u} + \dot{\theta}(\cos\theta)\vec{v} \\ &= \dot{\theta}[-(\sin\theta)\vec{u} + (\cos\theta)\vec{v}\,] \\ &= \dot{\theta}\,\vec{j} \end{aligned}$$

1.2 Ainsi que:

$$\frac{d}{dt}\vec{j} = -\dot{\theta}\,\vec{i}$$

démonstration :

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{j}}{dt} &= -\dot{\theta}(\cos\theta)\vec{u} - \dot{\theta}(\sin\theta)\vec{v} \\
&= \dot{\theta}[-(\cos\theta)\vec{u} + (\sin\theta)\vec{v}\,] \\
&= -\dot{\theta}\,\vec{i}
\end{aligned}$$

2 Calcul du vecteur vitesse

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r\,[(\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{v}]) \\
&= \dot{r}(\cos\theta)]\,\vec{u} - r\dot{\theta}\,(\sin\theta)\,\vec{u} + r(\cos\theta)\frac{d\,\vec{u}}{dt} + \dot{r}(\sin\theta)\vec{v} + r\,\dot{\theta}\,(\cos\theta)\vec{v} + r\,(\sin\theta)\frac{d\,\vec{v}}{dt} \\
&= \dot{r}(\cos\theta)\,\vec{u} - r\dot{\theta}\,(\sin\theta)\,\vec{u} + \dot{r}(\sin\theta)\vec{v} + r\,\dot{\theta}\,(\cos\theta)\vec{v} \\
&= \dot{r}[(\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\vec{v}] + r\,\dot{\theta}[-(\sin\theta)\,\vec{u} + (\cos\theta)\vec{v}] \\
&= \dot{r}\,\vec{i} + r\,\dot{\theta}\,\vec{j}
\end{aligned}$$

2.1 Calcul du vecteur vitesse directement en coordonnées radiale et orthoradiale :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{i}$$

$$\begin{aligned}
\vec{V} &= \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \\
&= \dot{r}\,\vec{i} + r\frac{d\,\vec{i}}{dt} \\
&= \dot{r}\,\vec{i} + r\,\dot{\theta}\,\vec{j}
\end{aligned}$$

3 Calcul de l'accélération

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \frac{d}{dt}\vec{V} \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{i} + r\,\dot{\theta}\,\vec{j}) \\
&= \ddot{r}\,\vec{i} + \dot{r}\frac{d}{dt}\vec{i} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{j} + r\,\ddot{\theta}\vec{j} + r\,\dot{\theta}\frac{d}{dt}\vec{j} \\
&= \ddot{r}\,\vec{i} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{j} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{j} + r\,\ddot{\theta}\vec{j} - r\,\dot{\theta}^2\,\vec{i} \\
&= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\vec{i} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\vec{j} \\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{i} + (r\,\dot{\omega} + 2\,\dot{r}\omega)\,\vec{j}
\end{aligned}$$

Cas où $r = C^{\mathrm{te}}$ et $\omega = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$

Dans le cas où le rayon vecteur est de longueur constante (le point matériel suit une trajectoire circulaire) et la vitesse de rotation est constante, nous avons :

$r = C^{\mathrm{te}}$ $\omega =$ C$^{\mathrm{te}}$
$\dot{r} = 0$ $\dot{\omega}$= 0
$\ddot{r} = 0$

ce qui donne $\boxed{\vec{\Gamma} = -r\,\dot{\theta}^2\,\vec{i} = -r\omega^2\,\vec{i}}$

L'accélération est alors radiale (la composante tangentielle suivant $\vec{j}$ est nulle) et son module est de valeur bien connue $\omega^2\, r$ le signe (-) indiquant qu'elle est dirigée en sens contraire de $\vec{i}$, c'est à dire vers l'intérieur de la trajectoire (vers le centre du cercle), elle est dite centripète.