CALCUL DE PI

PAR SILICIUM 628

1 Démonstration :

1.1 Développements limités :

Considérons la suite (infinie) y constituée des termes suivants :

$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

Ainsi que la valeur

$z = 1 - x$

Calculons le produit $z \times y$

$$\begin{aligned} z.y &= (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots) \\ &= 1\times(1-x)+x(1-x)+x^2(1-x)+x^3(1-x)+x^4(1-x)+\ldots \\ &= 1-x+x-x^2+x^2-x^3+x^3-x^4+x^4-x^5+\ldots. \end{aligned}$$

Remarquons que les termes s'annulent deux à deux $-x^2+x^2$ etc...) jusqu'à... l'infini SAUF le premier $=1$

Donc $z \, . \, y = 1$

D'où : $\frac{1}{z} = y$

Remplaçons z par sa valeur, nous obtenons :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

C'est ce qu'on appelle le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$

Par changement de variable x en $-x$ on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 \ldots$$

(les puissances paires restent positives, les puissances impaires changent de signe...)

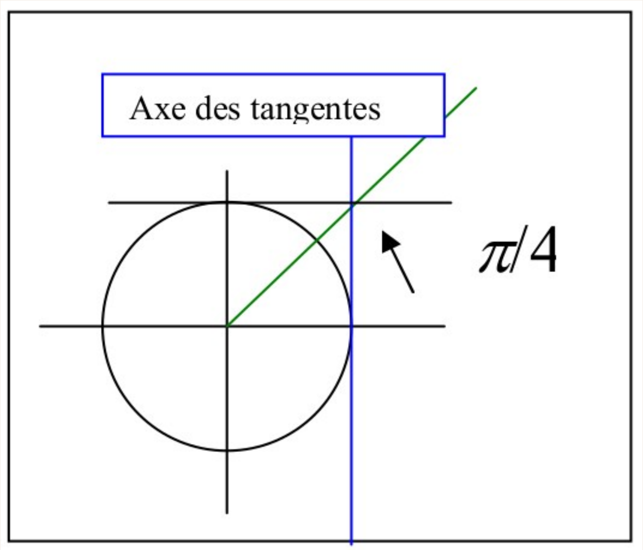
On ne va pas s'arrêter en si bon chemin, maintenant que nous avons ce nouveau jouet mathématique... Par un nouveau changement de variable, changeons x en x^2 dans le dernier résultat :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \ldots \tag{1}$$

Gardons ce résultat de côté, il nous servira dans un instant...

1.2 Un peu de trigo :

Considérons maintenant le cercle trigonométrique et traçons un angle de $\pi/4$ radians ($= 45$ degrés) :



On voit sur la figure ci-dessus que $\mathrm{tg}(\pi/4)=1$ (c'est le côté d'un carré)

Donc $(\pi/4)=\mathrm{Arctg}\,(1)$ et $\pi=4\times\mathrm{Arctg}\,(1)$

Idée : on va calculer le développement limité de la fonction $\mathrm{Arc\,tangente}$ qui est la fonction réciproque de la fonction $\mathrm{tangente}$.

$y = \text{Arctg}\,(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{tg}\,(y)$

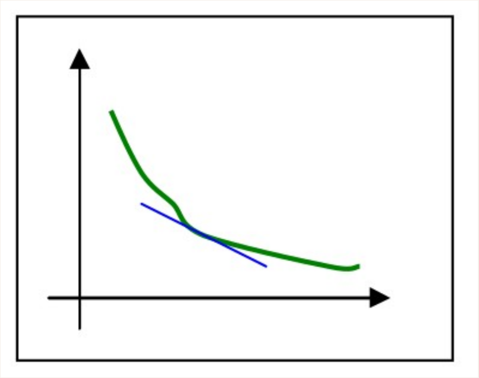
sachant que : $x = \text{tg}(y) = \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$

Dérivons cette formule :

$$\begin{aligned} x' &= 1/\cos^2(y) \\ &= 1 + \text{tg}^2(y) \end{aligned}$$

Or la fonction dérivée de la fonction réciproque d'une fonction z, est égale à l'inverse de la fonction dérivée de la fonction z.

Pour vous en rappeler, dites vous que la fonction dérivée est la fonction qui à chaque pt de la fonction de départ associe le nb dérivé en ce pt. Or ce nb dérivé représente la pente de la droite tangente à la courbe représentant la fonction en ce point. La fonction réciproque étant celle obtenue en intervertissant x et y, Il est évident que la figure obtenue est symétrique de celle de départ et que la pente de la tangente devient... l'inverse de la pente de départ.



En fait $\frac{dy}{dx}$ devient $\frac{dx}{dy}$

Reprenons notre formule de départ :

$y = \text{Arctg}\,(x)$

Dérivons, compte tenu de ce que nous venons de dire :

$y' = \frac{1}{x'}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x'} \\ &= \frac{1}{1+\text{tg}^2(y)} \end{aligned}$$

mais n'oublions pas que $x = \text{tg}\,(y)$ et donc $\text{tg}^2\,(y) = x^2$

Il vient :

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Le second terme, c'est ce que nous venions de calculer plus haut... en (1)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \ldots$$

et donc $y' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} \ldots$

Oui mais ce qui serait intéressant ce serait de connaître le développement limité de y, pas de y'

Pour l'obtenir, il suffit de **calculer l'intégrale** de y'

$$
\begin{aligned}
y &= \int y' \, dx \\
y &= \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots
\end{aligned}
$$

or nous avons vu que $\pi = 4 \times \mathrm{Arctg}\,(1)$

faisons donc $x = 1$ et multiplions le tout par 4 on obtient :

$$
\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \right)
$$

Vous pouvez très facilement le vérifier avec une calculatrice programmable ou avec un petit programme en Basic, en C ou autre. Toutefois la suite converge lentement et génère des décimales fausses à des rangs imprévus pour certaines valeurs du nombre de termes...