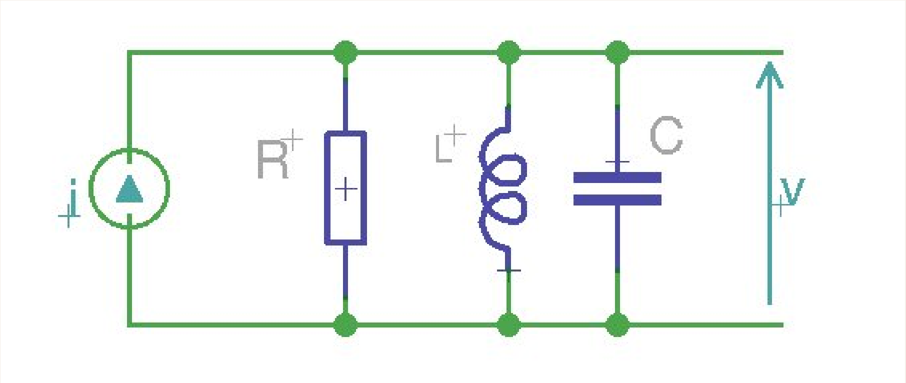
Transformée de Laplace (8)

1 Réponse indicielle d'un « circuit bouchon » (RLC //)



Remarquons, dans le cas présent, l'attaque par une source de courant, et non de tension.

Nous connaissons déjà pour l'avoir calculée précédemment la fonction de transfert opérationnelle de ce circuit :

Posons : $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ m = \dfrac{1}{2R}\sqrt{\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}} \end{cases}$

$$v(t)\,/\,i(t) = T(t) \;=\; R\,\frac{2m\,j\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2m\,j\,\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{w_0})^2}$$

1.1 Fonction de transfert opérationnelle :

$$T(p) \;=\; R\,\frac{2m\,p/\omega_0}{1+2m\,p/\omega_0+p^2/\omega_0^2}$$

$$=\; R\,\frac{2m\,\omega_0\,p}{p^2+2m\omega_0\,p+\omega_0^2}$$

Appliquons un échelon de courant, dont la tr. de Laplace est $\mathcal{L}[u(t)]=\frac{I_0}{p}$

(En plaçant par exemple le circuit bouchon dans le circuit collecteur d'un transistor monté en émetteur commun et travaillant en classe C, ce qui se rencontre fréquemment dans les émetteurs radio par exemple ou encore dans les alimentations à découpage...)

$$v(p)=i(p).T(p) \;=\; \frac{I_0}{p}\times R\,\frac{2m\,\omega_0\,p}{p^2+2m\omega_0\,p+\omega_0^2}$$

$$=\; I_0\times R\,\frac{2m\,\omega_0}{p^2+2m\omega_0\,p+\omega_0^2}$$

avec $I=1$ homogène à un courant.

Traitons cette fraction rationnelle comme nous l'avions déjà fait page7, c'est à dire écrivons le dénominateur sous la forme d'une somme de deux carrés de façon à mettre en évidence la transformée de Laplace d'un sinus et « arrangeons » le numérateur en conséquence :

$$\begin{aligned} v(p) &= I_0 \times R \frac{2m\omega_0}{(p+m\omega_0)^2+(\omega_0\sqrt{1-m^2})^2} \\ &= I_0 \times R \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \times \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{(p+m\omega_0)^2+(\omega_0\sqrt{1-m^2})^2} \end{aligned}$$

Rappel :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin bt] &= \frac{b}{p^2+b^2} \\ \mathcal{L}[e^{-at}\sin bt] &= \frac{b}{(p+a)^2+b^2} \end{aligned}}$$

En faisant $a=m\omega_0$ et $b=\omega_0\sqrt{1-m^2}$ nous obtenons :

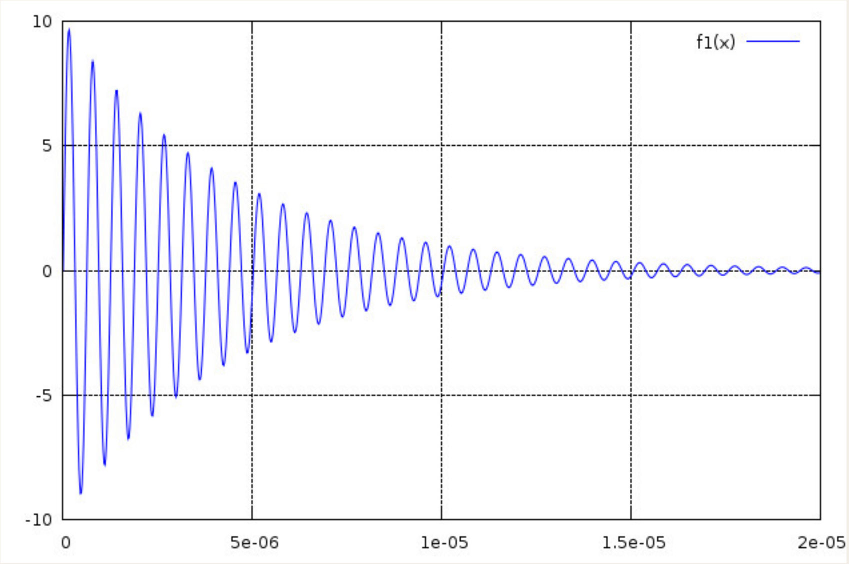
$$I_0 \times R \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \mathcal{L}[e^{-m\omega_0 t}\sin\omega_0\sqrt{1-m^2}\,t] = I_0 \times R \frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \times \frac{\omega_0\sqrt{1-m^2}}{(p+m\omega_0)^2+(\omega_0\sqrt{1-m^2})^2}$$

La réponse temporelle du circuit bouchon à un échelon (de courant) unitaire de Dirac est donc :

$$v(t) \;=\; I_0 \times R\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\, e^{-m\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1-m^2}\, t$$

1.2 Tracé de la réponse temporelle :

Voici le tracé (avec GNUplot) de cette fonction du temps ainsi que le listing source pour GNUplot :




```
#reponse RLC du second ordre
à un échelon
#en entrée: valeurs réelles
de R, L et C

set samples 1000
set xrange [0:2E-5]
set yrange [-10:10]
set grid
R=22E1
L=1E-6
C=10E-9
w=1/sqrt(L*C)
m=1/(2*R)*sqrt(L/C)
B=sqrt(1-m**2)
C=m/B

suite..
```

```
(...suite)

print " "
print "R=",R
print "L=",L*1E6 , " uH"
print "C=",C*1E9 , " nF"
print " "
print "m=",m
print "F0=",w/(1E6*2*pi), " MHz"
print "F1=",w/(B*1E6*2*pi), " MHz
(pseudo fréquence)"
print " "

f1(x)=R*2*(m/B)*(exp(-m*w*x))
*(sin(w*B*x))
plot f1(x) with lines lt 3
```

Remarques :

Dans le circuit considéré ci-dessus, l'inductance est idéale c'est à dire que sa résistance série en courant continu est nulle, ce qui explique que la tension tend vers zéro et non vers une valeur palier non-nulle.

Dans la réalité de certains cas, il faudrait considérer la résistance ohmique du fil, représentée par une résistance de valeur r en série avec la self plutôt qu'une résistance R en parallèle sur L et C.

Et dans ce cas la tension tendrait vers $E = r \times I_0$.

Toutefois en HF de faible puissance, la résistance ohmique de la self peut souvent être considérée comme nulle en continu, la résistance en parallèle représentant plûtot les pertes dynamiques magnétiques, par rayonnement et par « effet de peau » (dans L) et diélectriques (dans C) et bien sûr dans la charge éventuellement connectée au circuit.

Si le coefficient d'amortissement m est très faible, la diminution d'amplitude d'une période à la suivante est aussi très faible. Il est alors possible d'entretenir l'oscillation par l'application de trés fins créneaux de courants (des « tops ») à la fréquence de résonance du circuit (cas du fonctionnement en classe C) voire à un sous multiple de la fréquence de résonance (ce qui permet en fait d'otenir un multiplicateur de fréquence). Les très fins créneaux de courants en question s'apparentent de fait à des impulsions de Dirac. Je laisse cet aspect de la question en suspend pour le moment.