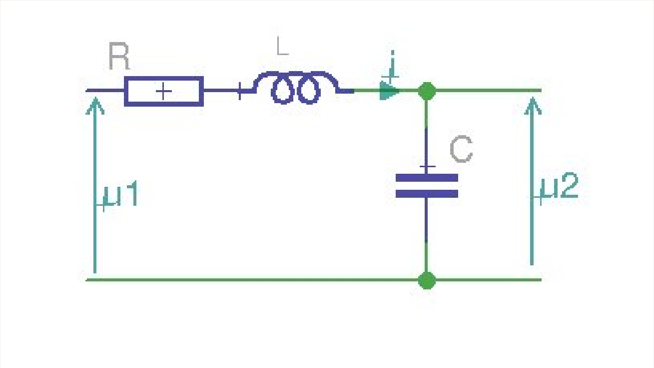
Transformée de Laplace (6)

1 Réponse impulsonnelle d'un circuit RLC

1.1 Calcul de la transformée de Laplace par les fractions rationnelles



C'est la réponse à une impulsion de Dirac. Dans le cas présent nous appliquerons une impulsion de tension à l'entrée et étudirons la tension en sortie, dans le cas où les conditions initiales sont nulles.

Nous connaissons déjà pour l'avoir calculée précédemment la fonction de transfert complexe de ce circuit :

on pose $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ \\ m = \frac{1}{2}\mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}} \end{cases}$

$$T(t) \; = \; \frac{1}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

Il suffit de remplacer $j\omega$ par p pour obtenir la fonction de transfert opérationnelle (**sans** avoir remplacé $j^2\,\mathrm{par}\,-1$, ne mélangeons pas les choses !)

$$T(p) \; = \; \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Appliquons un Dirac de tension en entrée (u_1), dont la TR. de Laplace est $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

$$u_2(p) \; = \; 1 \times \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Nous allons décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples:

$$u_2(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0\, p + \omega_0^2} = \frac{A}{D} = \frac{\omega_0^2}{(p - P_1)(p - P_2)}$$

$$= \frac{A_1}{p - P_1} + \frac{A_2}{p - P_2}$$

P_1 et P_2 qui sont les valeurs de p pour lesquelles le dénominateur D s'annulle sont appellés les pôles de la fraction rationnelle.

1.2 Détermination de $\boldsymbol{P_1}$ et de $\boldsymbol{P_2}$

$$u_2(p) = \frac{A}{(p - P_1)(p - P_2)} = \frac{A_1}{(p - P_1)} + \frac{A_2}{(p - P_2)}$$

Multiplions les deux membres par $(p - P_1)$

$$\frac{A}{(p - P_2)} = A_1 + A_2 \frac{(p - P_1)}{(p - P_2)}$$

puis faisons $p = P_1$

$$\frac{A}{(P_1 - P_2)} = A_1$$

Nous obtenons ainsi :

$$A_1 = \frac{\omega_0^2}{P_1 - P_2}$$

et d'une manière analogue :

$$A_2 = \frac{\omega_0^2}{P_2 - P_1}$$

P_1 et P_2 , les pôles de la fraction rationnelle, sont les racines de l'équation du second degré D=0.

$p^2 + 2m\omega_0\,p + \omega_0^2 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta &= (2m\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 \\ &= 4\omega_0^2 m^2 - 4\omega_0^2 \\ &= 4\omega_0^2(m^2 - 1)\end{aligned}$$

1.2.1 Cas où m>1

Si $m > 1$ alors $\Delta > 0$ et l'équation admet deux racines réelles. Les deux pôles sont alors réels:

$$\begin{aligned} P_1 &= -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} \\ P_2 &= -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1} \end{aligned}$$

démonstration :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(-2m\omega_0 + \sqrt{4\omega_0^2(m^2-1)} \\ &= -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1} \end{aligned}$$

le calcul de P_2 est identique en remplaçant $+\sqrt{\Delta}$ par $-\sqrt{\Delta}$.

Calcul de A_1 et de A_2

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\omega_0^2}{P_1 - P_2} \\
&= \frac{\omega_0^2}{2\omega_0\sqrt{m^2-1}} \\
&= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}
\end{aligned}
$$

et donc :

$$
A_2 = \frac{-\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}
$$

Nous obtenons la transformée de Laplace $v(p)$ suivante :

$$
\begin{aligned}
v(p) &= \frac{A_1}{(p - P_1)} + \frac{A_2}{(p - P_2)} \\
&= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \times \frac{1}{(p - P_1)} - \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \times \frac{1}{(p - P_2)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(\frac{1}{(p-P_1)} - \frac{1}{(p-P_2)}\right)$$

Nous en déduisons la réponse temporelle du circuit $v(t)$

$$v(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}(e^{P_1 t} - e^{P_2 t})$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[v(p)] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(\frac{1}{(p-P_1)} - \frac{1}{(p-P_2)}\right)\right] \\
&= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{(p-P_1)} - \frac{1}{(p-P_2)}\right)\right] \\
&= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{(p-P_1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-P_2)}\right)\right]\right) \\
&= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}(e^{P_1 t} - e^{P_2 t})
\end{aligned}$$

Remarque : j'utilise une propriété de linéarité de la transformée de Laplace inverse que je n'ai pas démontrée, mais dont la démonstration ne pose aucun problème. Les spécialistes préciseront qu'il faut exclure les fonctions zéro du champ d'application de la transformée de Laplace sans quoi la transformée de Laplace inverse n'est pas unique. (m'enfin !)

soit :

$$u_2(t) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(e^{(-m\omega_0+\omega_0\sqrt{m^2-1})t} - e^{(-m\omega_0-\omega_0\sqrt{m^2-1})t}\right)$$

on peut sortir un sinus hyperbolique de cette expression :

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\, e^{-m\omega_0 t}\, (e^{\omega_0\sqrt{m^2-1}\,t} - e^{-\omega_0\sqrt{m^2-1}\,t}) \\ &= \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\, e^{-m\omega_0 t} \times \mathrm{sh}\,(\omega_0\sqrt{m^2-1}\,t) \end{aligned}$$

1.2.2 Cas où m<1

Si $m < 1$ alors $\Delta < 0$ et l'équation admet deux racines imaginaires conjuguées. Les deux pôles sont alors imaginaires conjuguées :

$$\begin{aligned} P_1 &= -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ P_2 &= -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{aligned}$$

démonstration :

$$\begin{aligned} \Delta &< 0 \\ \Delta &= a^2 - 4b \\ &= -1(4b - a^2) \\ &= j^2(4b - a^2) \end{aligned}$$

$$P = \frac{-a \pm j\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

$$= -m\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-m^2}$$

Calcul de A_1 et de A_2

$$A_1 = \frac{\omega_0^2}{P_1 - P_2}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2j\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}$$

un calcul analogue montre que :

$$A_2 = \frac{-\omega_0}{2j\sqrt{(1-m^2)}}$$

Nous obtenons la transformée de Laplace $v(p)$ suivante :

$$u_2(p) = \frac{A_1}{(p-P_1)} + \frac{A_2}{(p-P_2)}$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\,\sqrt{1-m^2}} \times \frac{1}{(p-P_1)} - \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}} \times \frac{1}{(p-P_2)}$$

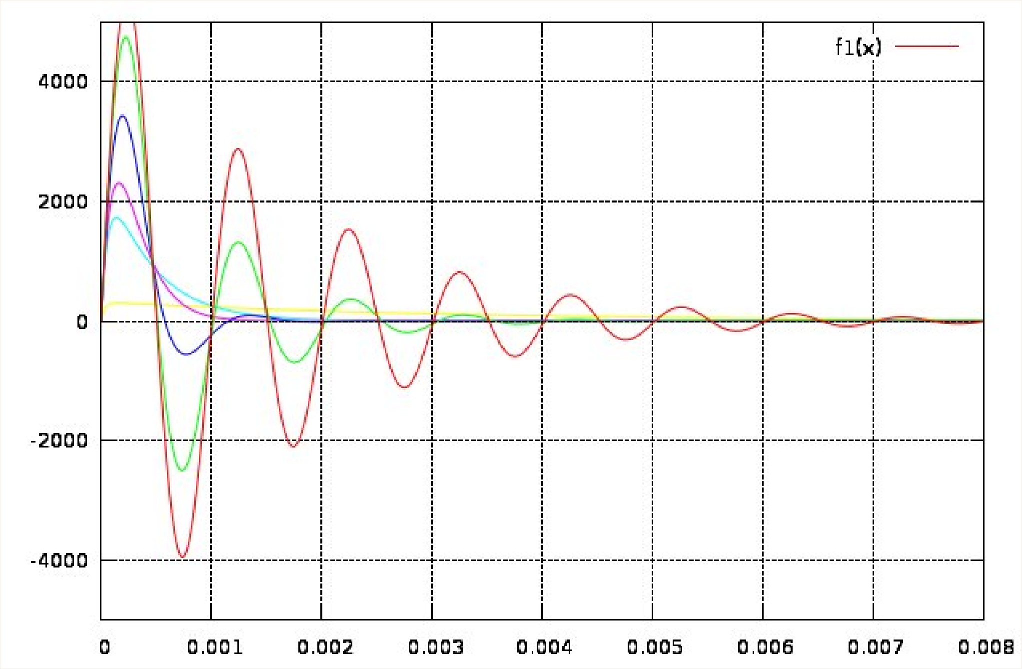
$$= \frac{\omega_0}{2j\,\sqrt{m^2-1}} (\frac{1}{(p-P_1)} - \frac{1}{(p-P_2)})$$

Nous en déduisons la réponse temporelle du circuit $v(t)$:

$$u_2(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \times \sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}\right)t)$$

C'est une sinusoïde amortie.

Voici, tracé avec le logiciel libre GNUplot, l'aspect de ces courbes pour diverses valeurs du facteur d'amortissement m :



Démonstration :

$$
\begin{aligned}
u_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[v(p)] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\Bigg[\frac{\omega_0}{}(\frac{1}{(p-P_1)}-\frac{1}{(p-P_2)})\Bigg] \\
&= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\mathcal{L}^{-1}\Bigg[(\frac{1}{(p-P_1)}-\frac{1}{(p-P_2)})\Bigg] \\
&= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\Bigg(\mathcal{L}^{-1}\Bigg[\Bigg(\frac{1}{(p-P_1)}\Bigg]-\mathcal{L}^{-1}\Bigg[\frac{1}{(p-P_2)}\Bigg)\Bigg]\Bigg) \\
&= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}(e^{P_1 t}-e^{P_2 t}) \\
&= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\Big(e^{(-m\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-m^2})t}-e^{(-m\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-m^2})t}\Big) \\
&= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\Big(e^{-m\omega_0 t}\times e^{(j\omega_0\sqrt{1-m^2})t}-e^{-m\omega_0 t}\times e^{(-j\omega_0\sqrt{1-m^2})t}\Big)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\left[e^{-m\omega_0 t}(e^{(j\omega_0\sqrt{1-m^2})t} - e^{(-j\omega_0\sqrt{1-m^2})t})\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{2j\sqrt{1-m^2}}\, e^{-m\omega_0 t} \times 2j \sin(\omega_0\sqrt{1-m^2})\, t)$$

$$= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}\, e^{-m\omega_0 t} \times \sin(\omega_0\sqrt{1-m^2})\, t)$$

rappel :

$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos x + j\sin x \\ e^{-jx} &= \cos x - j\sin x \end{aligned}$$

en soustrayant membre à membre il vient :

$$e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$$

Nous voyons précisément par ce calcul, de quelle manière apparait l'oscillation lorsque m devient inférieur à 1, l'exponentielle complexe se décompose en un sinus.