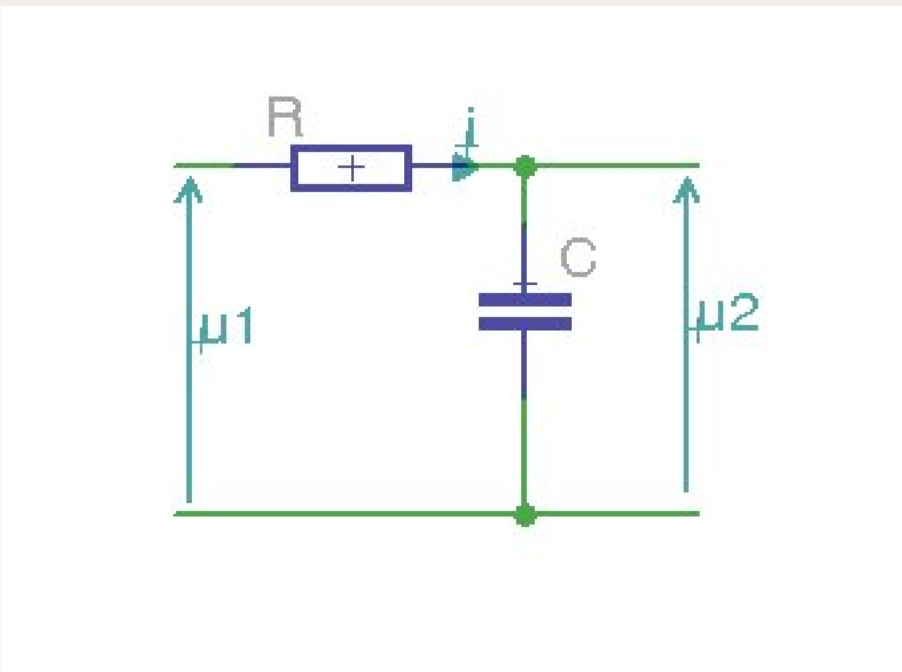
Transformée de Laplace (5)

1 Réponse indicielle d'un circuit RC

C'est la réponse (le signal de sortie) à la fonction de Heavicide (échelon unité) en entrée du circuit.



Nous avions déjà calculé la fonction de transfert complexe de de circuit, refaisons ce calcul pour la fonction de transfert opérationnelle :

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{u_1}{R+\frac{1}{Cp}} \\
u_2(p) &= u_1(p)\,\frac{1/\,\mathrm{C}p}{\mathrm{R}+1/\,\mathrm{C}p} \\
T(p) &= \frac{u_2(p)}{u_1(p)} \\
&= \frac{1/\,\mathrm{C}p}{\mathrm{R}+1/\,\mathrm{C}p} \\
&= \frac{1/\,\mathrm{C}p}{R+1/\,\mathrm{C}p}\times\frac{\mathrm{C}p}{\mathrm{C}p} \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{RCp}}
\end{aligned}
$$

posons $\tau = \mathrm{RC}$

$$
T(p) = \frac{1}{1+\tau p}
$$

Appliquons un échelon unitaire à l'entrée dont la transformée de Laplace est $\frac{1}{p}$

$u_1(p) = \frac{1}{p}$

Calculons le signal de sortie $u_2(p)$

$$\begin{aligned} u_2(p) &= u_1(p) \times T(p) \\ &= \frac{1}{p} \times \frac{1}{1+\tau p} \\ &= \frac{1}{p(1+\tau p)} \end{aligned}$$

Nous obtenons une fraction rationnelle qu'il nous faut factoriser de façon à l'écrire sous forme d'une somme de sa partie entière et d'une combinaison linéaire de ses éléments de première espèce et d'une combinaison linéaire de ses éléments de seconde espèce...

Dans le cas présent il est évident que nous pouvons écrire $u_2(p)$ sous la forme:

$u_2(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}$

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} = \frac{A(1+\tau p) + Bp}{p(1+\tau p)}$$

Réécrivons notre « évidence » sous cette nouvelle forme :

$$\frac{1}{p(1+\tau p)} = \frac{A(1+\tau p)+Bp}{p(1+\tau p)}$$

Ces deux fractions égales ayant même dénominateur, on en déduit qu'elles ont des numérateurs égaux :

$$\begin{aligned} 1 &= A(1+\tau p)+Bp \\ &= A+A\tau p+Bp \\ &= A+p(A\tau+B) \\ &= A+p(A\tau+B) \end{aligned}$$

Et plus précisément :

$$1+0p = A+p(A\tau+B)$$

On en déduit l'égalité des coefficients des puissances de p (ici p n'apparait qu'à la puissance 0 et 1, mais il peut aussi apparaitre à des puissances plus élevées p^2 , p^3 ....)

Nous obtenons donc :

$$A = 1$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} A\tau + B &= 0 \\ 1 \times \tau + B &= 0 \\ \tau + B &= 0 \\ B &= -\tau \end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors écrire $u_2(p)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} u_2(p) &= \frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \end{aligned}$$

Nous obtenons une somme dont chacun des termes admet une transformée inverse de Laplace que nous avons déjà vue :

En effet nous savons que :

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}$$

et que:

$$\mathcal{L}[e^{at}] \;=\; \frac{1}{p-a}$$

et donc (en changeant a en $-a$) :

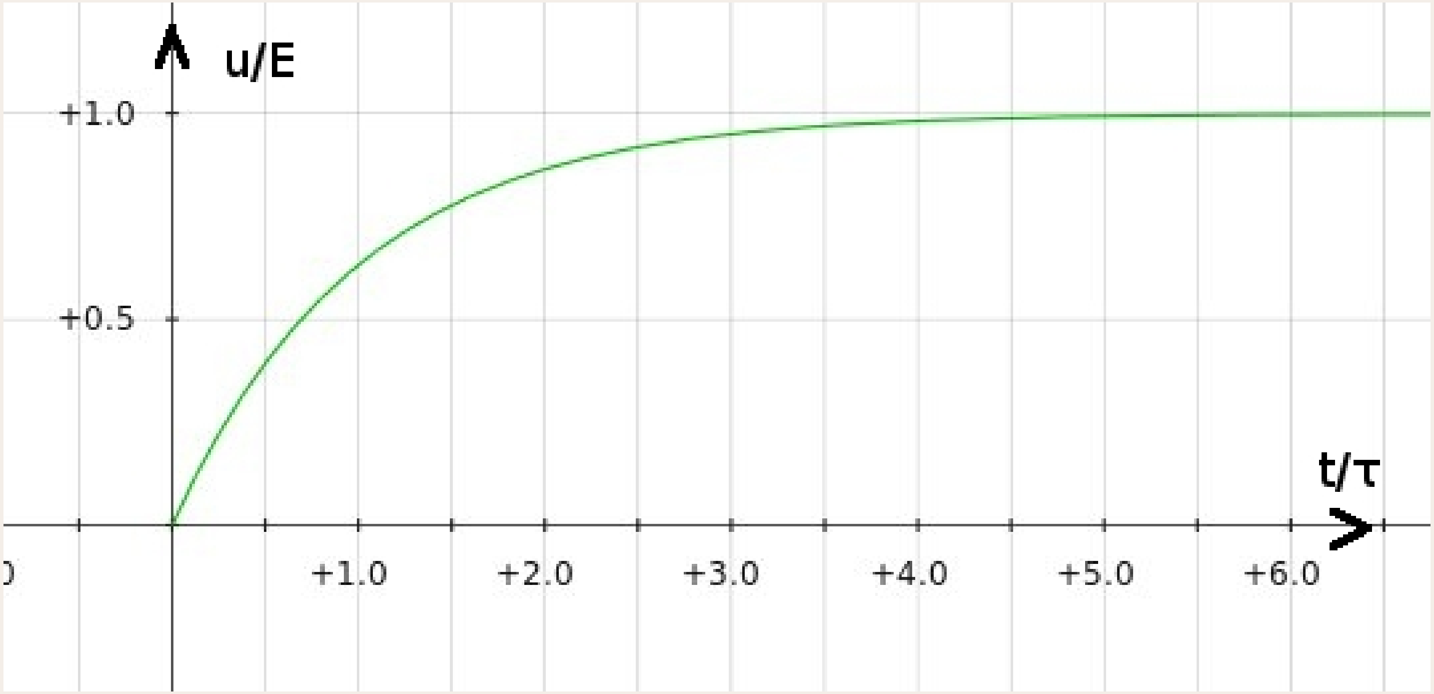
$$\mathcal{L}[e^{-at}] \;=\; \frac{1}{p+a}$$

Nous en déduisons le signal de sortie $u_2(t)$

(en faisant $a=\frac{1}{\tau}$):

$$\begin{aligned} u_2(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right) \\ &=\; \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right) \\ &=\; 1-e^{-\frac{1}{\tau}t} \end{aligned}$$

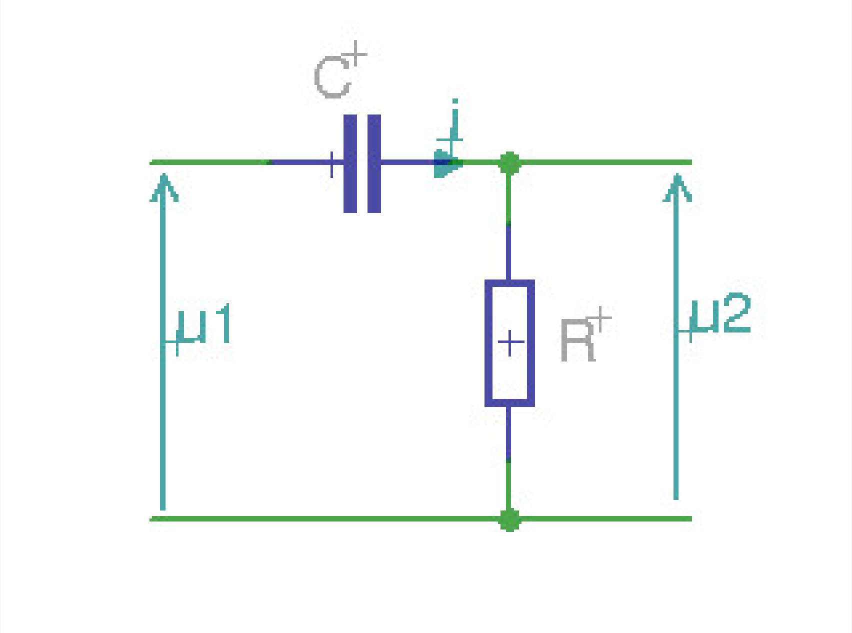
Voici le graphe de cette réponse temporelle :



Nous avions déjà calculé ICI cette réponse d'un circuit RC à un échelon de tension par deux manières différentes. Cette troisième méthode qui nous donne bien évidemment le même résultat nous a évité de résoudre une équation différentielle. C'est en cela que réside la puissance de la transformée de Laplace.

2 Réponse indicielle d'un circuit RC passe haut

C'est la réponse (le signal de sortie) à la fonction de Heavicide (échelon unité) en entrée du circuit suivant :



Calcul pour la fonction de transfert opérationnelle :

$$i = \frac{u_1}{R + \frac{1}{Cp}}$$

$$u_2(p) = u_1(p) \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + 1/\,\mathrm{C}p}$$

$$T(p) = \frac{u_2(p)}{u_1(p)}$$

$$= \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+1/\mathrm{C}p}$$

$$= \frac{\mathrm{R}}{R+1/\mathrm{C}p}\times\frac{\mathrm{C}p}{\mathrm{C}p}$$

$$= \frac{\mathrm{RCp}}{1+\mathrm{RCp}}$$

$\mathrm{posons}\,\tau=\mathrm{RC}$

$$T(p) = \frac{\tau p}{1+\tau p}$$

Appliquons un échelon unitaire à l'entrée dont la transformée de Laplace est $\frac{1}{p}$

$u_1(p)=\frac{1}{p}$

Calculons le signal de sortie $u_2(p)$

$$u_2(p) = u_1(p)\times T(p)$$

$$= \frac{1}{p}\times\frac{\tau p}{1+\tau p}$$

$$= \frac{\tau}{1+\tau p}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}$$

Calcul de la transformée de Laplace inverse :

Nous savons que :

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$$

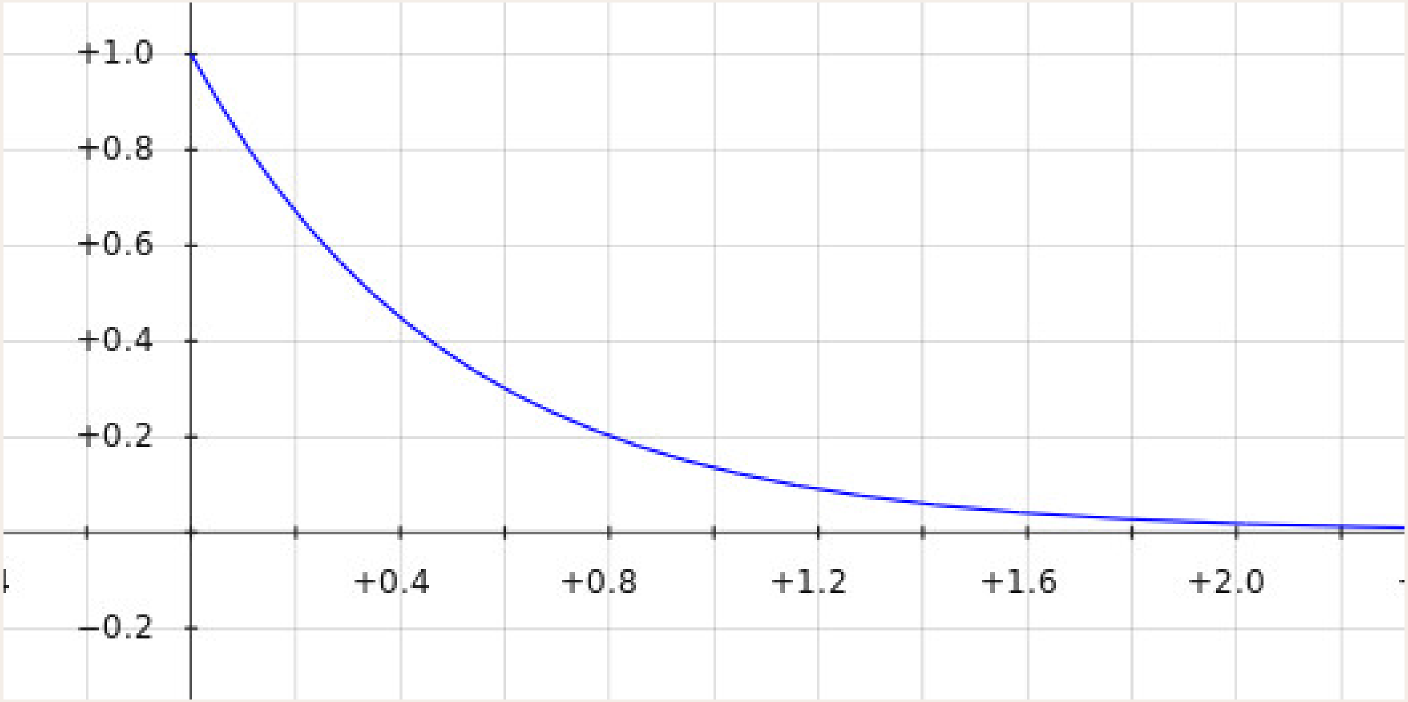
Posons $a = \frac{1}{\tau}$

Nous en déduisons le signal de sortie $u_2(t)$

$$u_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Voici le graphe de cette réponse temporelle :



Ce circuit est aussi appelé différenciateur : il permet comme on le voit, dans le domaine impulsionnel d'obtenir facilement... des impulsions (qu'on peut facilement mettre en forme avec un circuit logique pourvu d'un hystérésis en entrée, CD40106 ou 74F14 ou bascule à deux transistors par exemple...) à partir d'un signal carré.