Transformée de Laplace (4)

1 Impédances opérationnelles

Considérons les transformées de Laplace de la tension $u(t)$ et du courant $i(t)$, transnsformées qui ne sont plus des fonctions du temps mais de la variable p

$$\mathcal{L}[u(t)] = u(p)$$

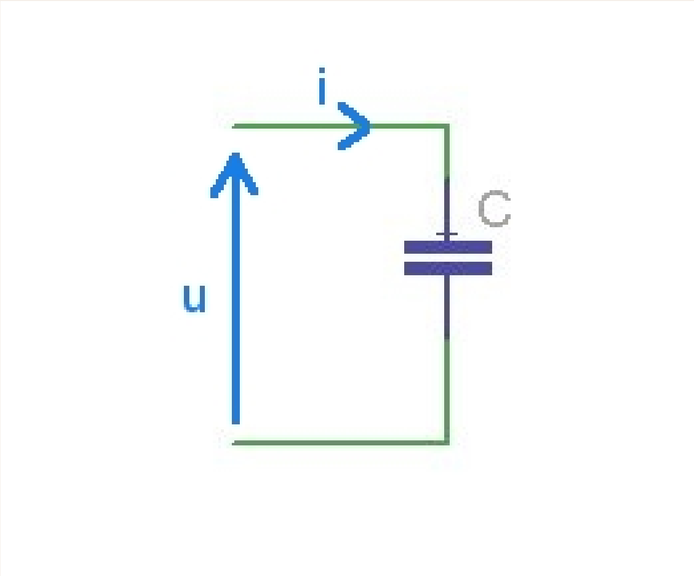
$$\mathcal{L}[i(t)] = i(p)$$

On définit ainsi l'impédance opérationnelle du composant comme le quotient de $u(p)$ sur $i(p)$

$$Z(p) = \frac{u(p)}{i(p)}$$

1.1 Impédance opérationnelle du condensateur C

Je devrais dire de la capacité voire capacitance C, puisque le concept ici pris en compte n'est pas le composant mais ses propriétés. En revanche quand j'entends actuellement parler de capacitor et de résistor (et de bobinator? heu non, inductor...) j'ai les cheveux qui se dressent sur ma tête.



Les lois élémentaires de l'électricité donnent :

$Q = C \times U$

(la quantité d'électricité (en Coulombs) dans le condensateur est égale au produit de la tension aux bornes par la valeur du condensateur (en Farad))

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dq &= C.du \\ dq &= i.dt \\ Cdu &= i.dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
i &= C\frac{du}{dt} \\
&= Cu'
\end{aligned}
$$

$i(t) = Cu'(t)$

et si nous considérons les transformées de Laplace de ces fonctions :

$i(p) = Cp.u(p)$

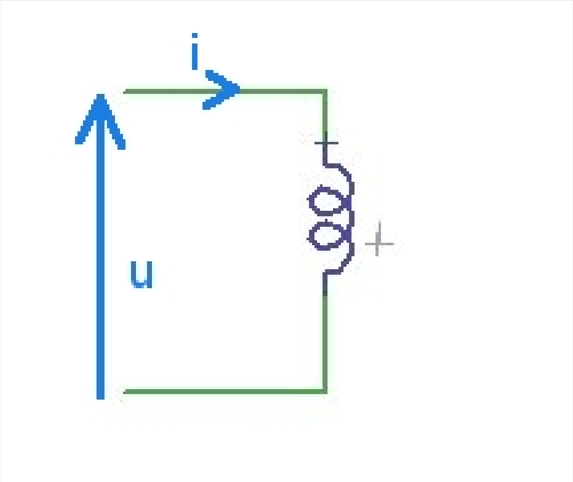
on obtient donc l'impédance opérationnelle du condensateur :

$$
\begin{aligned}
Z_c(p) &= \frac{u(p)}{i(p)} \\
&= \frac{u(p)}{pC.u(p)} \\
&= \frac{1}{pC}
\end{aligned}
$$

Remarque : L'impédance complexe du condensateur étant $\frac{1}{j\omega C}$ nous voyons que pour l'obtenir à partir de l'impédance opérationnelle $\frac{1}{pC}$ il suffit de remplacer $j\omega$ par p (et vice-versa). Cela est valable pour tous les composants.

1.2 Impédance opérationnelle de la self L

$->$ de l'inductance !



$$u = L\frac{di}{dt}$$

$$= Li'$$

$u(t) = Li'(t)$

et si nous considérons les transformées de Laplace de ces fonctions :

$$u(p) = Lp.i(p)$$

on obtient donc l'impédance opérationnelle de la self :

$$\begin{aligned} Z_L(p) &= \frac{u(p)}{i(p)} \\ &= \frac{Lp.i(p)}{i(p)} \\ &= pL \end{aligned}$$

Si nous remplaçons p par $j\omega$ nous obtenons bien l'impédance complexe $j\omega L$ de la self.

1.3 Impédance opérationnelle de la résistance R

Pour la résistance la loi d'ohm nous donne :

$u(t) = Ri(t)$

Ce qui transposé en transformée de Laplace devient :

$u(p) = Ri(p)$

on obtient donc l'impédance opérationnelle de la résistance :

$$\begin{aligned} Z_R(p) &= \frac{u(p)}{i(p)} \\ &= \frac{Ri(p)}{i(p)} \\ &= R \end{aligned}$$

La résistance est inchangée (dans un système purement résistif l'entrée et la sortie sont reliées par une équation algébrique qui n'est pas une équation différentielle, pas d'intégrations ou de dérivations).

Nous allons maintenant pouvoir réaliser des circuits constitués de ces composants de base R, L, C et voir ce que nous en dit Laplace. Reconnaissons qu'après être passés par des considérations mathématiques assez complexes il semblerait que nous nous dirigeons vers des calculs algébriques bien plus classiques. Comme quoi les maths nous réservent parfois des surprises. En fait les mathématiciens n'inventent pas des trucs juste pour embêter les gens mais plutôt des outils qui en fin de compte simplifient la vie ! (Et même celle des ordinateurs, comme nous l'avons vu à propos de la Transformée de Fourier Rapide).