# Transformée de Laplace (3)

## 1 $\mathcal{L}[a\,f(t)]$

$$\mathcal{L}[a\,f(t)] \;=\; a\,\mathcal{L}[\,f(t)]$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[a\,f(t)] &= \int_0^{\infty} a\,f(t)\,e^{-pt}\,dt \\ &= a\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt \\ &= a\,\mathcal{L}[\,f(t)]\end{aligned}$$

### 1.1 Propriété de linéarité : $\mathcal{L}[c_1\,f_1(t)+c_2 f_2(t)\,]$

$$\mathcal{L}[c_1\,f_1(t)+c_2 f_2(t)\,] \;=\; c_1\,\mathcal{L}[f_1(t)]+c_2\,\mathcal{L}[f_2(t)\,]$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[c_1\, f_1(t) + c_2 f_2(t)\,] &= \int_0^{\infty} [c_1\, f_1(t) + c_2 f_2(t)\,]\, e^{-pt}\, dt \\
&= \int_0^{\infty} ([c_1\, f_1(t)]e^{-pt} + [c_2 f_2(t)]e^{-pt})\; dt \\
&= \int_0^{\infty} [c_1\, f_1(t)]e^{-pt}\, dt + \int_0^{\infty} c_2 f_2(t) e^{-pt}\, dt \\
&= c_1 \int_0^{\infty} f_1(t)\, e^{-pt}\, dt + c_2 \int_0^{\infty} f_2(t)\, e^{-pt}\, dt \\
&= c_1\, \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2\, \mathcal{L}[f_2(t)\,]
\end{aligned}$$

## 1.2 Transformée de Laplace de la dérivée $\mathcal{L}[f'(t)]$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)\, dt$$

intégration par parties :

$\int uv' \;=\; uv - \int vu'$

$u = e^{-pt}$ et $v' = f'$

$u' = -p\, e^{-pt}$ $v = f$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= [f(t)\, e^{-pt}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -p\; e^{-pt}\, f(t)\, dt \\
&= 0 - f(0) + p \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \\
&= p\mathcal{L}[f(t)] - f(0)
\end{aligned}$$

## 1.3 $\mathcal{L}[e^{at}]$

$$\mathcal{L}[e^{at}] \;=\; \frac{1}{p-a}$$

Démonstration:

$$\mathcal{L}[e^{at}] \;=\; \int_0^{\infty} e^{at}\, e^{-pt}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} e^{(a-p)t}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{a-p} e^{(a-p)t}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{a-p} \lim_{t\to\infty} e^{(a-p)t} - \frac{1}{a-p} \times 1
\end{aligned}
$$

si $p > a$ alors $a - p < 0$ nous pouvons écrire:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}] &= \frac{1}{a-p} \times 0 - \frac{1}{a-p} \\
&= \frac{1}{p-a}
\end{aligned}
$$

## 1.4 $\mathcal{L}[\sin \omega t]$

$$
\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
$$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
e^{j\omega t} &= \cos j\omega t + j \sin \omega t \\
e^{-j\omega t} &= \cos j\omega t - j \sin \omega t
\end{aligned}
$$

après soustraction membre à membre nous obtenons :

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin \omega t] &= \int_0^\infty \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\, e^{-pt}\, dt \\
&= \frac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{j\omega t})e^{-pt} - \frac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{-j\omega t})\, e^{-pt} dt \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2j} \times \frac{p + j\omega - p + j\omega}{p^2 + \omega^2} \\
&= \frac{1}{2j} \times \frac{2j\omega}{p^2 + \omega^2} \\
&= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

## 1.5 $\mathcal{L}[\cos \omega t]$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

Démonstration:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos j\omega t + j\sin \omega t \\ e^{-j\omega t} &= \cos j\omega t - j\sin \omega t \end{aligned}$$

après addition membre à membre nous obtenons :

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t] &= \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\, e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (e^{j\omega t})e^{-pt} + \frac{1}{2j}\int_0^\infty (e^{-j\omega t})\, e^{-pt}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{p + j\omega + p - j\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2p}{p^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

## 1.6 Propriété de translation : $\mathcal{L}[e^{at} f(t)]$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(p - a)$$

Démonstration :

posons :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^\infty e^{at} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, e^{(a-p)t}\, dt$$

posons $s = p - a$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{at}\, f(t)] &= \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \\
&= F(s) \\
&= F(p-a)
\end{aligned}$$

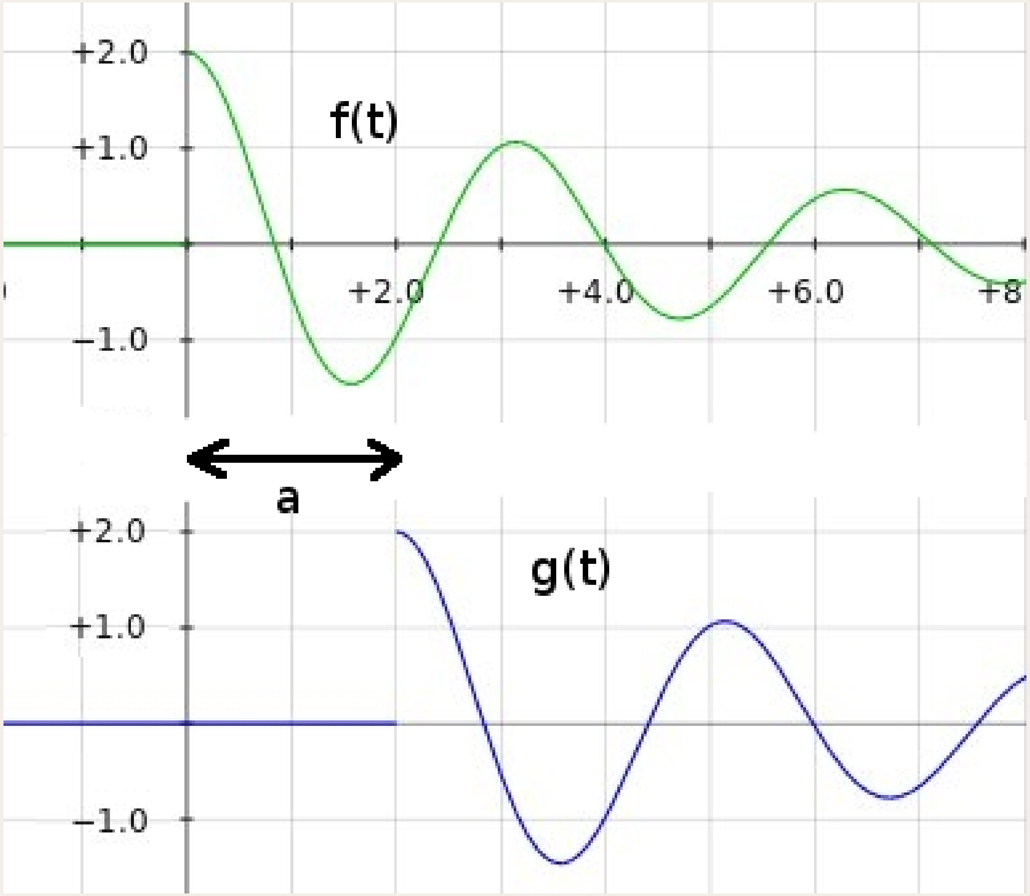
## 1.7 Théorème du retard

(également dénommée deuxième propriété de translation)

soit les fonctions $f(t)$ et $g(t)$

avec $\begin{cases} g(t) = f(t-a)\ \mathrm{pour}\ t > a \\ g(t) = 0\ \mathrm{pour}\ t < a \end{cases}$

$g(t)$ est « en retard » sur $f(t)$




$$\mathcal{L}[g(t)] \;=\; e^{-ap}\,\mathcal{L}[f(t)]$$

Démonstration :

$$\mathcal{L}[g(t)] \;=\; \int_0^{\infty} g(t)\,e^{-pt}\,dt$$

$$= \int_0^a g(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_a^\infty g(t)\, e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^a 0 + \int_a^\infty f(t-a)\, e^{-pt}\, dt$$

on pose $t - a = x$

$t = x + a$

$$\mathcal{L}[g(t)] = 0 + \int_a^\infty f(x)\, e^{-p(x+a)}\, d\,(x+a)$$

$$= \int_a^\infty f(x)\, e^{-pa}\, e^{-px}\, dx$$

car $d(x+a) = dx$

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-ap} \int_a^\infty f(x)\, e^{-px}\, dx$$

$$= e^{-ap}\, \mathcal{L}[f(t)]$$

## 1.8 Système du second ordre $\mathcal{L}[e^{-at}\sin \omega t]$

Nous avons vu que :

soit $f(t) = \sin \omega t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ &= F(p)\end{aligned}$$

or nous venons de démontrer que :

$$F(p-a) = \mathcal{L}[e^{at} f(t)]$$

dans cette dernière expression, si nous remplaçons $f(t)$ par la fonction choisie au départ, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at}\sin \omega t] &= F(p-a) \\ &= \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega}{p^2-2ap+a^2+\omega 2}\end{aligned}$$

Ce résultat est remarquable et permet d'épargner bien des calculs de *fractions rationnelles* aux électroniciens.

On voit que les fonctions analytiques, fonctions variables du temps, sont remplacée par des opérations sur de simples nombres **La dérivation et l'intégration sont remplacées respectivement par une multiplication et une division**.

Nous possédons dorénavant une boîte à outils bien garnie, nous allons pouvoir commencer à travailler. Nous définirons tout d'abord la transmittance de Laplace d'un système et les impédances opérationnelles des composants $R, LC$.