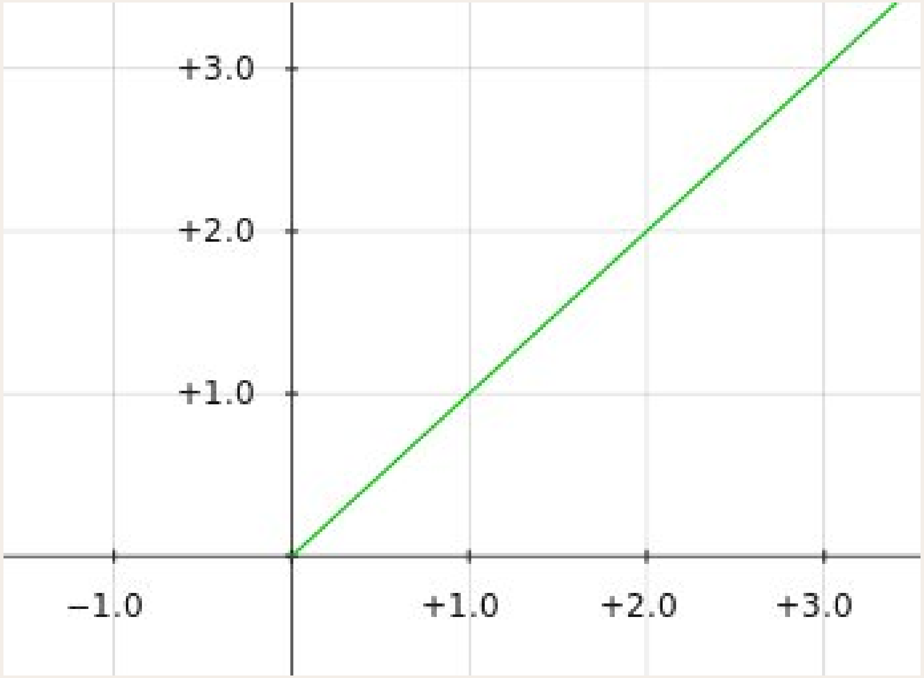
Transformée de Laplace (2)

1 Rampe unitaire



C'est la fonction :

- $f(t) = t$ pour $t > 0$
- $f(t) = 0$ pour $t < 0$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$$

Démonstration :

Soit la fonction $f(t) = t$

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{\infty} t.e^{-pt}.dt$$

Rappel : Intégration par parties :

$$\int uv' = uv - \int vu'$$

posons :

$u = t \quad \text{et} \quad v' = e^{-pt}$

$u' = 1 \qquad\qquad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}$

$$\mathcal{L}(t) = \left[-\frac{1}{p}t.e^{-pt}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{p}e^{-pt}\,dt$$

$$= \left[-\frac{1}{p}t.e^{-pt}\right]_0^{\infty} - \frac{1}{p^2}[e^{-pt}]_0^{\infty}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{p}t.e^{-pt}\right] - 0\times e^{0} - \frac{1}{p^2}(0-1)$$

$$= -\frac{1}{p^2}\lim_{t\to\infty}[pt.e^{-pt}] + \frac{1}{p^2}$$

$$= -\frac{1}{p^2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{pt}{e^{pt}}\right] + \frac{1}{p^2}$$

$$= -\frac{1}{p^2}\times 0 + \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p^2}$$

Car :

$$\lim_{t\to\infty}\frac{pt}{e^{pt}} = 1/\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$$

$$= 1/a \quad \text{avec}\, a\to\infty$$

$$= 0$$

Démonstration :

En effet, posons $e^x = y$

$y = \log x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} &= \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\log y} \\
&= 1/\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} \\
&= 1/a \quad \text{avec}\, a \to 0
\end{aligned}$$

Il reste toutefois à démontrer que :

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\log y}{y} = 0$$

pour $t > 1$ nous avons :

$$\begin{aligned}
t &> \sqrt{t} \\
\frac{1}{t} &< \frac{1}{\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

pour $x>1$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t}\,dt &< \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\
\log x &< [2\sqrt{t}]_1^x \\
\log x &< 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1} \\
\log x &< 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x} \\
0 &< \log x < 2\,\sqrt{x} \\
0 &< \frac{\log x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Voilà donc $\log x$ encadré entre 0 et $\frac{2}{\sqrt{x}}$

Appliquons la règle « des gendarmes » concernant les limites, sachant que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

on obtient :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

Comme vous pouvez le constater, je tiens à tout démontrer afin que l'utilisation ultérieure de cet outil formidable que constitue la transformée de Laplace puisse se faire sur des bases solides et vérifiables.