# Transformée de Laplace (1)

Nous avons vu que les développements en série de Fourier des fonctions périodiques permettaient d'effectuer des calculs sur des signaux périodiques de forme quelconque. C'était l'objet de *l'analyse harmonique*.

La transformée de Laplace, quant-à elle, permet de faire des calculs sur des signaux de forme quelconque, *non périodiques*, en particulier des signaux dit *impulsionnels*. C'est l'objet du *calcul opérationnel*. Dans le domaine de l'électronique nous serons ainsi amenés à définir des *impédances et des fonctions de transfert opérationnelles*, de la même manière que nous avions défini des impédances complexes, afin de calculer la réponse impulsionnelle à ces signaux.

Nous pouvions déjà déterminer ces réponses en résolvant des équations différentielles comme nous l'avons fait dans le cas de la charge d'un condensateur avec une résistance. Mais pour des circuits plus complexes, et donc des équations différentielles plus complexes (d'ordre supérieur à 2) la résolution directe n'est plus envisageable alors que le passage par la transformée de Laplace le permet, en remplaçant la résolution des équations différentielles par un simple calcul algébrique.

## 1 Définition

Soit $f(t)$ une fonction de la variable $t$ (pour nous, électroniciens, ce sera le temps) définie pour $t \in \mathbb{R}$ $t > 0$

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est notée $\mathcal{L}[f(t)] = f(p)$ et vaut:

$$f(p) \;=\; \int_{0-}^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$

$t = (0-)$ étant un instant aussi proche de zéro qu'on veut mais antérieur à $t = 0$

avec $p \in \mathbb{R}$

**Remarques :**

Rien de bien méchant, l'intégrale on connait, l'exponentielle aussi... Tout cela a un petit air de transformée de Fourier... en remplaçant $j\omega$ par $p$ et avec des bornes d'intégration différentes.

Les transformées de Laplace concernent ce qui se passe APRES l'instant $t = 0$.

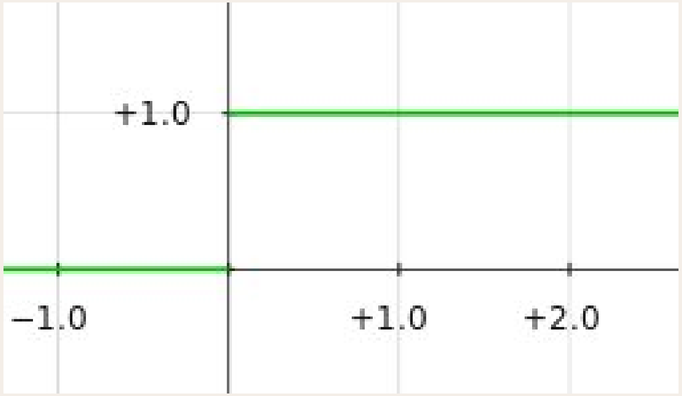
$p$ peut aussi être un nombre complexe.

# 2 Quelques Transformées de Laplace

## 2.1 $\mathcal{L}(1)$ (Fonction unité ou de Heaviside)

La fonction Echelon (ou unité) se note aussi $u(t)$

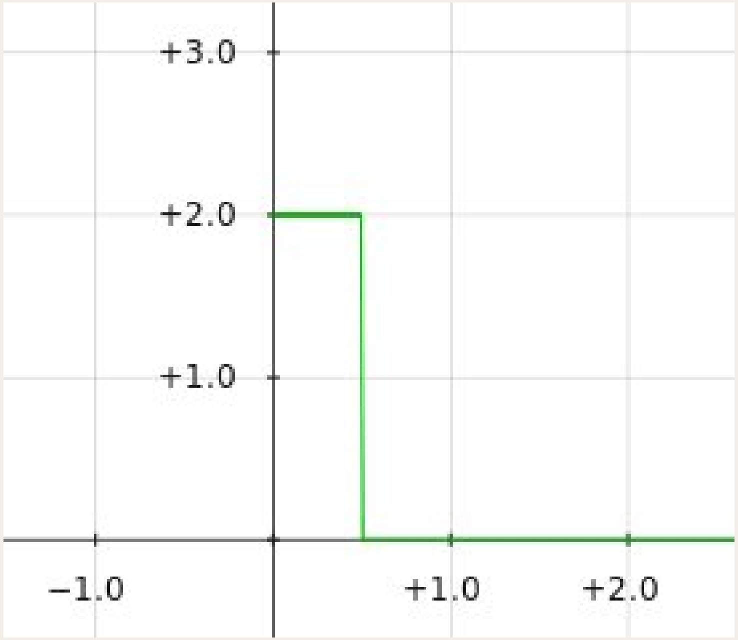
avec $\begin{cases} t < 0 & u(t) = 0 \\ t \geqslant 0 & u(t) = 1 \end{cases}$




$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_{0-}^{\infty} 1 \times e^{-pt}\,dt \\
&= \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{\infty} \\
&= 0 - (-\frac{1}{p}e^0) \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

## 2.2 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac, (on dit aussi « un Dirac » et ce n'est pas à proprement parler une fonction) notée $\delta(t)$ est la limite lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 de la fonction rectangulaire (un top) de durée $\varepsilon$ et de hauteur $a = \frac{1}{\varepsilon}$ (la surface $a\varepsilon = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon}$ =1 restant constante et valant 1, sa hauteur tend vers l'infini pour une durée nulle, une sorte de laser méga-watt-femto-seconde...)




$$\mathcal{L}[\delta(t)] \; = \; 1$$

Démonstration:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] \; = \; \int_{0-}^{\infty} \delta(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{0-}^{\infty} a\, e^{-pt}\, dt \\
&= a \int_{0-}^{\varepsilon} e^{-pt}\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a \left[ \frac{-1}{p}\, e^{-pt} \right]_{0-}^{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a \left( \frac{-1}{p}\, e^{-p\varepsilon} - \frac{-1}{p} e^{0} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a \left( \frac{-e^{-p\varepsilon}}{p} + \frac{1}{p} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a\epsilon\, \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} \\
&= a\varepsilon \\
&= 1
\end{aligned}
$$

en effet :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \;=\; 1$$

Démonstration de cette limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} \\
&= \mathrm{nb\,derive\,de}\, e^x \,\mathrm{en}\, x = 0 \\
&= \exp'(x) \,\mathrm{en}\, x = 0 \\
&= \exp(x) \,\mathrm{en}\, x = 0 \; (\mathrm{la\,derivee\,de\,exp}\; c'\mathrm{est\,exp}) \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

et donc, en cuisinant un peu les signes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \;=\; 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} \; = \; 1$$

Comme vous le voyez, le calcul de la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac n'est pas toute simple lorsqu'on entre dans le détail, mais le résultat, lui, est « on ne peut plus simple » !