Fonction (distribution) de Dirac

1 Définitions

1.1 $\delta_0(t)$

On appelle fonction (ou plus exactement **distribution**) de Dirac la fonction $\delta(t)$:

$$\delta_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ +\infty & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

C'est la limite d'une impulsion rectangulaire d'aire =1 lorsque sa durée tend vers 0 (et par conséquent lorsque sa hauteur tend vers l'infini, **ce qui n'en fait pas exactement une fonction**). On peut la aussi la définir comme la dérivée de la fonction de Heaviside (échelon unité).

1.2 $\delta_a(t)$

On rencontrera souvent la fonction $\delta_a(t)$ qui par définition est nulle partout sauf lorsque son argument est égal à a, donc pour $t - t_0 = 0$, c'est à dire $t = t_0$

$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq a \\ +\infty & \text{si } t = a \end{cases}$$
$$\text{et telle que :}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t) dt = 1$$

C'est un « Dirac en $t = a$ » , c'est à dire : ailleurs qu'à l'origine.

Remarque :

$$\delta_a(t) = \delta_0(t - a)$$

1.3 Dirac comme fonction indicatrice

Considérons maintenant le produit d'une fonction $f(t)$ par un « Dirac en t_0 »

$$f(t).\delta_0(t - t_0)$$

Comme $\delta(t - t_0)$ est nulle partout sauf en t_0, on peut écrire que

$$f(t).\delta_0(t - t_0) \;=\; f(t_0).\delta_0(t - t_0)$$

calculons son intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta_0(t - t_0)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0).\delta_0(t - t_0)\,dt$$

or $f(t_0)$ est une constante, c'est la valeur de la fonction $f(t)$ en t_0, on peut donc la sortir de l'intégrale, il vient, en posant $y_0 = f(t_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0).\delta_0(t - t_0)\,dt \;=\; y_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t - t_0)\,dt$$

or nous avons vu plus haut que par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t - t_0)\,dt \;=\; 1$$

Nous pouvons donc écrire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\delta_0(t - t_0)\,dt \;=\; f(t_0)$$

L'impulsion de Dirac est donc une « fonction indicatrice », c'est à dire qu'elle permet d'isoler la valeur que prend la fonction à un instant t_0.