

Transformée de Fourier d'un train de sinusoïdes



1 Présentation

Nous allons procéder par étapes : Dans un premier temps nous allons calculer la TF d'un signal périodique infini (théorique donc) sinusoïdal. Ensuite celle d'une «fonction porte» (créneau rectangulaire). Puis nous ferons passer notre sinusoïde par cette porte de durée finie et nous utiliserons ce que nous avons appris du produit de convolution de deux fonctions pour obtenir le résultat : La transformée de Fourier d'un train de sinusoïdes.

2 Signal sinusoïdal d'une durée infinie :

Soit la fonction sinusoïdale de fréquence f_0 et de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$

$$y = f(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Rappel :

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

2.1 Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} \times e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t - j\omega t} dt\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt$$

2.1.1 Pour $\omega = \omega_0$ nous obtenons :

$$\mathcal{F}(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega_0)t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^0 dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [t]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= +\infty$$

Il s'agit d'une raie spectrale infiniment fine (de largeur nulle) pour la fréquence f_0 et d'amplitude infinie : c'est une impulsion de Dirac « située » en ω_0 , c'est à dire $\delta(\omega - \omega_0)$

Note 1. La distribution de Dirac « δ », aussi appelée par abus de langage fonction de Dirac, introduite par Paul Dirac, peut être considérée comme une fonction δ qui prend une « valeur » infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs, et dont l'intégrale sur \mathbb{R} est égale à 1 (source Wikipédia). Les électroniciens parlent « d'impulsion de Dirac » ou « d'un Dirac ». Ce n'est pas à proprement parler une fonction, une valeur infinie n'a pas d'existence physique.

Dans le cas que nous venons de voir, $\omega - \omega_0$ s'annule bien pour $\omega = \omega_0$, d'où la notation $\delta(\omega - \omega_0)$.

2.1.2 Pour $\omega \neq \omega_0$:

Pour toute autre fréquence, lorsque $\omega \neq \omega_0$ l'intégrale est nulle :

Posons $\omega_0 - \omega = \omega_i = 2\pi f_i = 2\pi \frac{1}{\tau}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_i t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n\tau}^{+n\tau} e^{j2\pi \frac{t}{\tau}} dt \\ &= 0\end{aligned}$$

En effet la valeur moyenne de $e^{j2\pi \frac{t}{\tau}} dt$ calculée sur un nombre entier de fois sa période τ est nulle (les deux alternances de la sinusoïde s'annulent, quel que soit ce nombre).

2.2 Résultat :

En définitive, la transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdale infinie est nulle partout sauf pour la fréquence égale à celle de la sinusoïde, pour laquelle elle est « infinie ».

$$\mathcal{F}(e^{j\omega_0 t}) = \delta(\omega - \omega_0)$$

que vous trouverez écrite de la manière équivalente dans les livres de Mathématiques et de Physique :

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\nu_0 t}) = \delta(\omega - \omega_0)$$

puisque les mathématiciens utilisent la lettre i pour représenter le nombre imaginaire, et la lettre grecque ν (nu) pour la fréquence, sachant que $\omega = 2\pi\nu$. Je précise tout ça parce que j'ai promis de tout vous démystifier et aussi pour le plaisir de l'écrire...

Cet infini ponctuel peut paraître conceptuellement gênant et donc bien peu raisonnable, mais remarquons que cela provient du fait que nous avons considéré une fonction sinusoïdale qui s'étend dans le temps de $-\infty$ à $+\infty$ ce qui est également bien peu raisonnable. (Le « Big Bang » à -13,7 milliards d'années, en comparaison, c'est de la rigolade...)

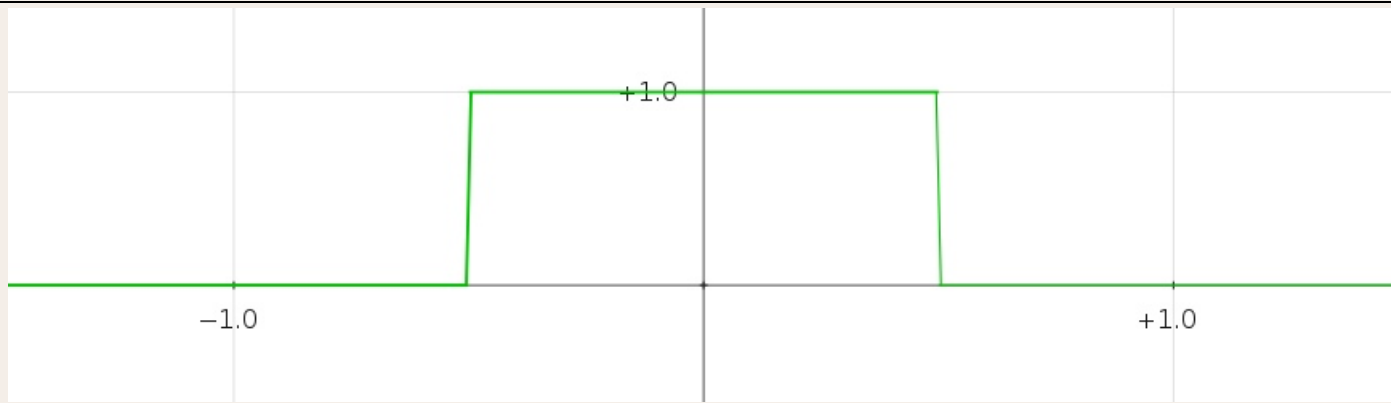
Mais réfléchissons un peu plus avant sur ce point : un signal sinusoïdal (stable) qui s'étendrait dans le temps de $-\infty$ à $+\infty$ permettrait de connaître sa fréquence avec une précision aussi grande que l'on voudrait, il suffirait d'effectuer la mesure de sa période sur un nombre aussi grand que l'on voudrait d'alternances. Et ainsi nous pourrions effectivement obtenir une largeur de la raie spectrale aussi fine que l'on voudrait.

A l'inverse, un signal sinusoïdal de durée finie (un train de quelques sinusoïdes) aura pour transformée de Fourier une raie d'autant plus large et moins haute que la durée du signal sera brève. La fréquence ne sera connue qu'avec une précision limitée. Mais en contrepartie le train d'impulsions pourra être localisé dans le temps (et/ou l'espace) d'autant plus précisément que sa durée sera brève. Nous allons d'ailleurs le démontrer. Mais le calcul direct est un peu compliqué, il est plus simple de passer par des étapes intermédiaires, à savoir : le calcul de la TF d'une impulsion rectangulaire, puis la TF du produit de convolution de deux fonctions.

3 Transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire :

Aussi appelée « fonction porte », « fenêtre rectangulaire $\text{rect}_\tau(t)$ », « fonction projectrice $\Pi_a(t)$ », « créneau solitaire »...

$$\text{rect}_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



3.1 calculons sa transformée de Fourier :

Rappels :(voir ma page \sin' et \cos')

$$[\sin x]' = \cos x \rightarrow \int \cos x = \sin x$$

$$[\cos x]' = -\sin x \rightarrow \int \sin x = -\cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

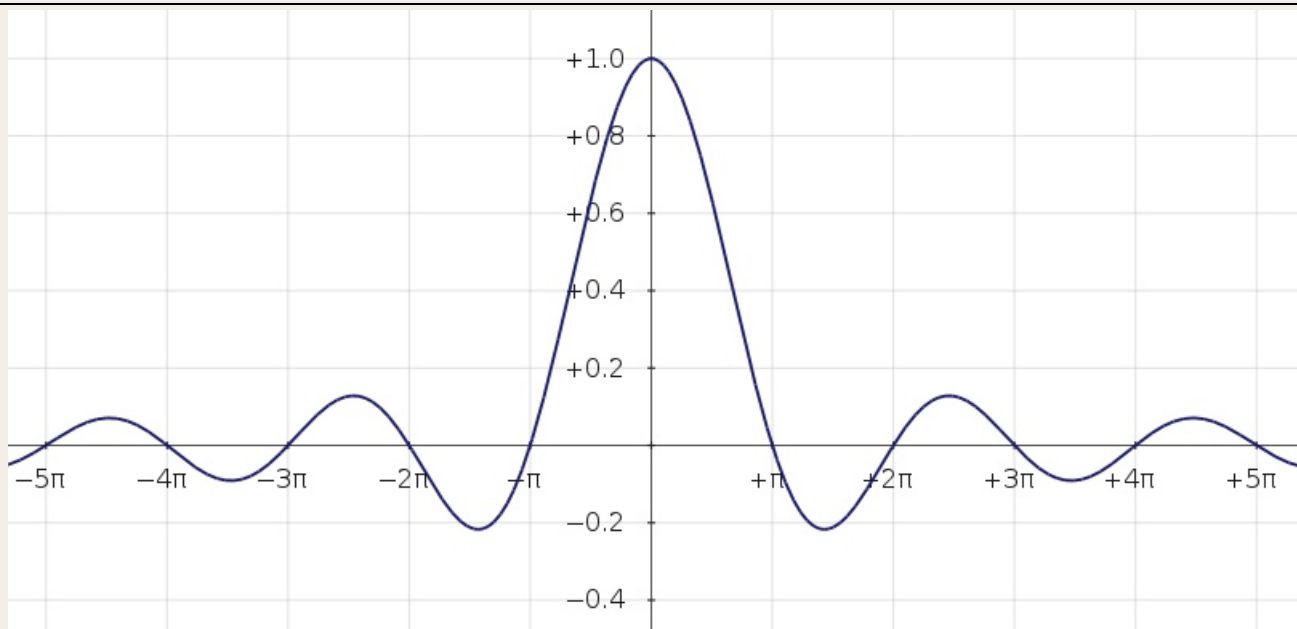
$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\mathcal{F}[\text{rect}_\tau(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^{\tau} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t + j \frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_{-\tau}^{\tau} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\omega} [\sin \omega t + j \cos \omega t]_{-\tau}^{\tau} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega} (\sin \omega \tau - \sin (-\omega \tau)) + j (\cos \omega \tau - \cos (-\omega \tau)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega} (2 \sin \omega \tau + 0) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau \operatorname{sinc}(\omega \tau)
\end{aligned}$$

Nous voyons apparaitre un **sinus cardinal** ($\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$) dont voici la courbe :



Remarque 2.

- Cette transformée de Fourier est réelle (partie imaginaire nulle).
- La largeur du pic principal est égal à $\Delta x = 2\pi$

c'est à dire : $\Delta(\omega\tau) = 2\pi$

$$\Delta\omega \cdot \tau = 2\pi$$

$$2\pi \Delta\nu \cdot \tau = 2\pi$$

$$\Delta\nu \cdot \tau = 1$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$$

La largeur (fréquentielle) de la raie est inversement proportionnelle à la largeur temporelle de l'impulsion. Leur produit est constant.

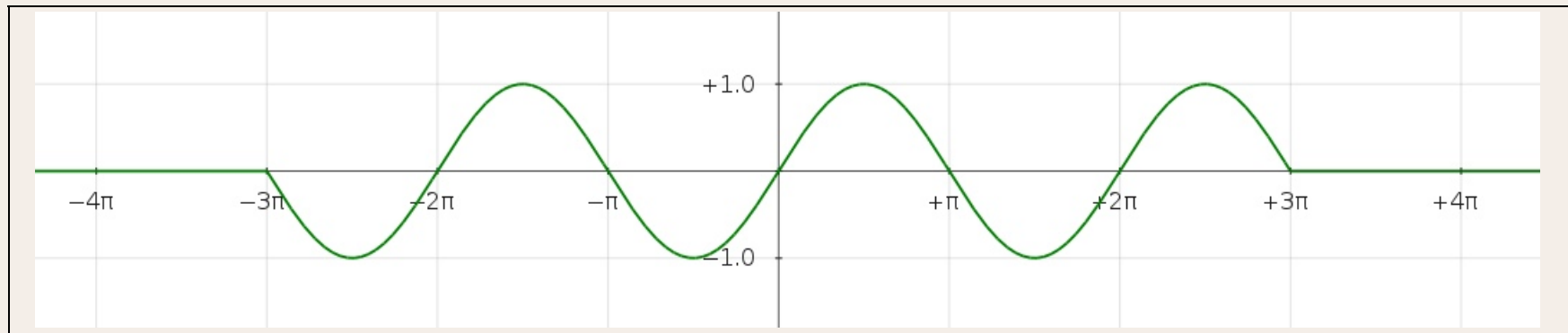
Si l'on augmente la largeur de l'impulsion, la largeur du pic de la TF diminue. Si l'on fait tendre la largeur de l'impulsion vers l'infini, la largeur du pic de la TF va tendre vers zéro, la TF *devient* une impulsion de Dirac.

Ces fenêtres rectangulaires (ainsi que d'autres plus « arrondies » comme la fenêtre cosinusoidale, la fenêtre de Hanning, de Blackman, de Gauss, de Kaiser, de Dolph-Chebyshev...) sont très importantes, elles nous serviront à borner un signal de durée « infinie » afin d'obtenir et d'étudier des signaux bien réels de durée finie, fut-elle très grande.

4 Transformée de Fourier d'un train d'ondes sinusoïdales

Soit le train d'ondes sinusoïdales de fréquence f_0 et de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ et de durée τ

$$f(t) = \begin{cases} e^{j\omega_0 t} & \text{si } t \in [-\tau/2, \tau/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Remarque 3.

C'est le produit d'une fonction sinusoïdale par la « fenêtre rectangulaire » vue précédemment.

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \cdot \text{rect}_\tau(t)$$

Nous avons vu (sur ma page « Produit de convolution ») que la transformée de Fourier du produit (multiplication) de deux fonctions est égale au *produit de convolution* des transformées de Fourier de ces fonctions.

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[g(t)]$$

Il en résulte que transformée de Fourier d'un train de sinusoïdes est égal au **produit de convolution** [de la Transformée de Fourier de la fonction sinus] **et** [de la Transformée de Fourier de la fonction porte rectangulaire].

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] * \mathcal{F}[\text{rect}_\tau(t)]$$

Il se trouve que nous avons déjà calculé ces deux composantes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] &= \delta_0(\omega - \omega_0) = \delta_{\omega_0}(\omega) \\ \mathcal{F}[\text{rect}_\tau(t)] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau \text{sinc}(\omega\tau)\end{aligned}$$

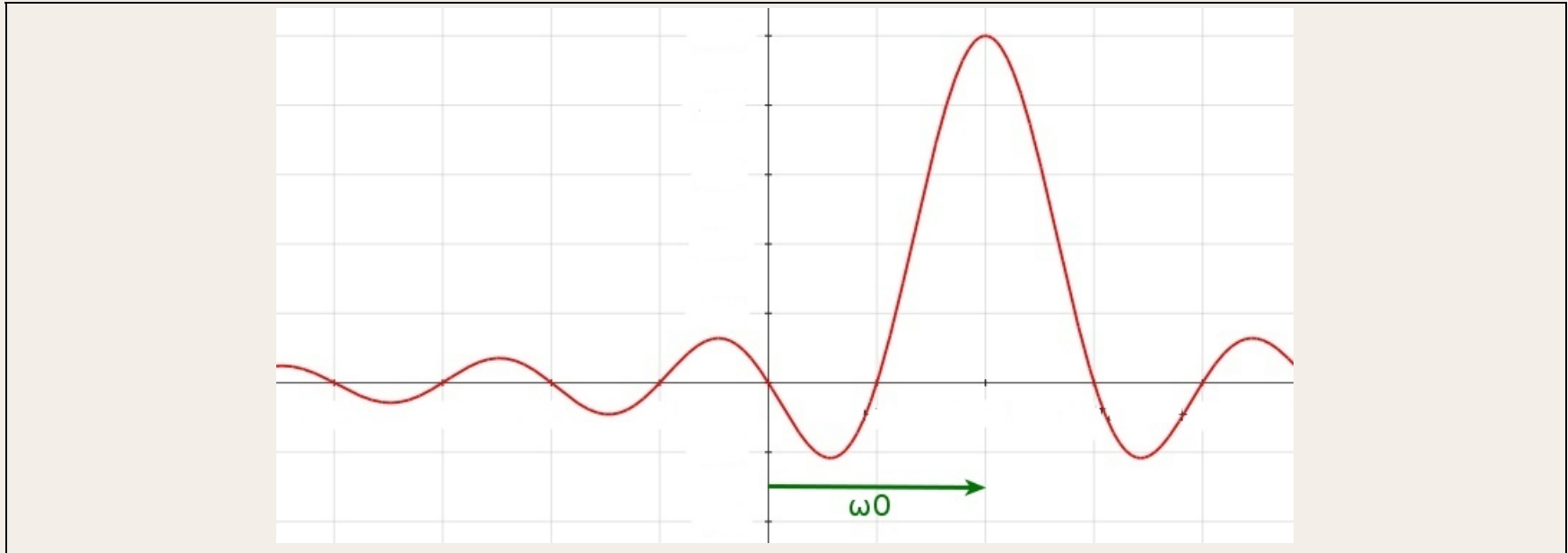
$$\mathcal{F}[f(t)] = \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau \text{sinc}(\omega\tau) \right] * \delta_{\omega_0}(\omega)$$

Nous avons également calculé le produit de convolution d'une fonction par un Dirac $\delta_a()$, le résultat consiste à translater la fonction de la valeur a .

Nous obtenons donc comme transformée de Fourier d'un train d'impulsions sinusoïdales :

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau \operatorname{sinc}(\omega\tau - \omega_0)$$

La figure ci-dessous illustre le décalage en fréquence (la maximum de la courbe est centré sur la fréquence du signal incident, on aurait pu s'en douter !)



5 Transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac

Note 4. Par définition, comme vu plus haut, l'intégrale sur \mathbb{R} d'une impulsion de Dirac est égale à 1

Il en résulte qu'à la limite, la transformée de Fourier d'une unique impulsion de Dirac est égale à 1, c'est à dire non plus à une raie spectrale de fréquence bien définie, mais à la fonction constante, correspondant à l'ensemble de toutes les fréquences imaginable s'étendant jusqu'à $+\infty$ (Hz). Ainsi un train d'impulsions de durée nulle sera exactement localisé dans le temps mais n'aura pas de fréquence déterminée.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt \\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque 5.

Il se trouve que ces cas de figure correspondent effectivement au comportement des particules élémentaires (fermions) ou des photons (bosons). En particulier en mécanique quantique on démontre qu'on ne peut pas connaître à la fois la position d'une particule dans l'espace ET son énergie avec une précision absolue.

(Etienne Klein nous fait remarquer très justement, dans une conférence présentée sur ce site, que cette façon de dire la chose présuppose qu'une particule élémentaire EST un corpuscule au sens de la mécanique classique qui baigne dans une onde qui l'accompagne, ce qui constitue un blocage conceptuel, les notions présentées dans les livres de mécanique quantique sont restées figées telle qu'elles étaient au début du 20ème siècle, cent ans en arrière ! En fait la notion de corpuscule ponctuel ayant à la fois une position définie et une vitesse définie mais que la méchante mécanique quantique nous empêcherait de connaître ne correspond à rien !)

Ces particules se comportent plutôt (suivant la façon dont on les observe) tantôt comme des corpuscules dont on peut mesurer la position, tantôt comme des ondes dont on peut mesurer la fréquence et donc l'énergie, et que l'on peut faire interférer et diffracter (on parle de " dualité ondes-particules "). Elles se comportent donc en fait plutôt comme des " paquets d'ondes ", (des quanta) dont nous venons de décrire la transformée de Fourier.

Etienne Klein nous dit "comme des champs". Alors ondes, champs ? Je vais réfléchir à la question.

En tous cas, ce qui m'a toujours paru extrêmement difficile à comprendre dans le formalisme de la "dualité onde-particule" c'est l'annihilation d'une paire électron-positon (et plus généralement d'une particule avec son anti-particule) : que les parties "ondes" se détruisent pourquoi pas, mais que deviennent les parties matérielles "particule" ?

Autre phénomène pour le moins curieux : La radioactivité bêta dans laquelle un neutron se transforme en proton avec émission d'un électron et d'un anti-neutrino. Les neutrons et les protons sont formés de quarks, donc on est pas trop étonné de voir que l'un puisse se transformer en l'autre. Mais l'électron il vient d'où ? C'est une particule élémentaire dit-on, or ni les neutrons ni les protons, ni les quarks en contiennent...

Si les particules ne sont QUE des ondes (ou des champs) alors là oui, je marche !

Et le fait que la charge de l'électron soit exactement (en module) égale à celle du proton (plus exactement que celles des quarks soit exactement des multiples de $e/3$) ? Avec des ondes (ou des champs) je me sens plus à l'aise !

(Notons qu'elles ont d'autres propriétés qui nous paraissent bien étranges encore, aux noms poétiques dans le cas des quarks).

La découverte de la structure de l'atome nous a montré que la matière est faite essentiellement... de vide (comme l'Univers) ! Eh bien il semblerait que la nature (qui avait soit-disant horreur du vide) en contienne bien d'avantage encore ! Mais en contrepartie le vide semble bien peu vide !!! Entre les champs, les ondes et les particules virtuelles, il semble bien rempli.

Mais arrivé à ce stade de ma cogitation je dois préciser que tout cela ne me porte absolument PAS à croire en des esprits ou des êtres immatériels, comme nous en abreuvons les religions et les feuilletons TV débiles. L'observation intelligente de la nature nous montre que l'esprit et l'intelligence sont liés à la vie, (même "l'intelligence artificielle" des ordinateurs puisque les ordinateurs sont conçus par des êtres vivants !) et que la vie est une propriété émergente de la matière. Les ondes et les champs, hors de la présence de matière à basse énergie, ne font PAS émerger la complexité nécessaire aux organismes vivants. Donc je ne crois pas en Dieu, ni en l'âme, ni aux esprits purs ni à tous ces concepts qui à mes yeux sont des fadaises. Je vais donc griller éternellement dans les flammes de l'enfer ! Zut alors !!

Oui mais alors si la matière est faite d'ondes ??? Oui mais des ondes qui se donnent la peine de s'organiser en matière ! Et c'est dans ces conditions particulières seulement que peut émerger la complexité pour autant que l'expérience nous le démontre inlassablement.

Si le sujet vous intéresse, je vous propose de voir des vidéos passionnantes de conférences sur la Mécanique Quantique. Voir dans la partie "Articles" de ce site.

Remarque 6.

Dans le domaine de l'électronique le fait qu'une impulsion brève soit équivalente à un spectre très large en fréquence (on parle de « bruit blanc ») se rencontre lors du fonctionnement de MOSFET en régime de commutation « à fronts raides » (j'en avais dit un mot à propos des variateurs pour moteurs brushless ainsi que des alimentations à découpage) générant des parasites électromagnétiques. C'est aussi ce qui se produit lors de la manœuvre d'un simple interrupteur sur le secteur 230V (aidé par de multiples rebondissements des contacts), parasitant la réception radio en modulation AM. Il est curieux de remarquer que pour éviter de produire des parasites on a tendance intuitivement à fermer « rapidement » un contact afin de ne pas faire durer l'opération... mais que plus l'établissement ou la suppression du courant se fait rapidement et plus le spectre des parasites sera large ! (On peut aussi remarquer que, dans le cas d'un interrupteur mécanique, plus on rapproche rapidement les contacts, plus on « cogne fort » et plus les rebondissements seront importants !)

Toutefois il ne faut pas oublier qu'au tout début de la radio (1887), les premiers émetteurs furent des émetteurs à étincelles mettant à profit la génération d'ondes électromagnétiques par des commutations brèves. Mais les émetteurs à étincelles furent vite abandonnés car produisant des signaux occupant des largeurs de bande très conséquentes.

Dans le prochain article nous parlerons de la transformée de Fourier rapide et de son implémentation sur microcontrôleur.