Produit de convolution

Le produit de convolution va nous servir dans la suite de cet exposé lorsque nous calculerons la transformée de Fourier d'un signal volontairement bridé (par une « fenêtre temporelle »), à l'image de ce qu'on rencontre dans la réalité. Et ce qui évite de traiter des valeurs de durée infinie.

Avertissement.

J'ai voulu alléger au maximum l'exposé afin d'éviter de décourager ceux qui ne sont pas tombés dans la marmite des maths étant petits, afin qu'au lieu de nous abandonner en cours de route ils puissent accéder rapidement à la compréhension des choses et au plaisir que cela procure. En conséquence il manque des précisions sur les ensembles de définition des fonctions, les limites de validité, et des notations du style « *presque partout* » ou « *pour presque tout* x » ainsi que la justification des changements de l'ordre des intégrations par exemple. Pour approfondir ces points vous pouvez consulter par exemple les pages « Wikipédia » qui se veulent exhaustives mais dont le principe de navigation par liens hypertextes aboutit vite à noyer le lecteur.

1 Définition

Le produit de convolution de deux fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ se note $\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}$.

Il est définit par :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).\boldsymbol{g}(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(x-t)dt\end{aligned}$$

1.1 Démonstration de l'équivalence de ces deux écritures

posons $x - t = u$

et par conséquent : $t = x - u$

et réécrivons la première définition :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).g(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(u).g(x-u)dt\end{aligned}$$

Cette dernière écriture est équivalente à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(x-t)dt$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

1.2 Remarques

- Les variables x et t sont toutes deux des variables temporelles, elles *peuvent* être réelles $\in \mathbb{R}$ ou bien $\in \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$...) ou complexes $\in \mathbb{C}$.
- Le produit de convolution est commutatif $(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) = (\boldsymbol{g} * \boldsymbol{f})(x)$

1.2.1 démonstration :

Puisque la multiplication dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{C}$, nous pouvons écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(x-t)dt$$

ce qui peut s'écrire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(x-t).\boldsymbol{f}(t)\,dt$$

ce qui est aussi, par définition, égal à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(x-t).\boldsymbol{f}(t)\,dt \;=\; (\boldsymbol{g} * \boldsymbol{f})(x)$$

On démontre tout aussi facilement que le produit de convolution est :

- distributif
- associatif

2 Propriétés

2.1 Elément neutre :

Attention : ce qui suit n'est rigoureux que dans le cadre des distributions. L'impulsion de Dirac n'est pas à proprement parler une fonction, mais une distribution.

Soit $\boldsymbol{f}(x)$ une fonction et $\delta_0(x)$ une impulsion de Dirac en 0. Calculons leur produit de convolution:

$$\boldsymbol{f} * \delta_0(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).\delta_0(t)\,dt$$

$\delta(t)$ vaut 0 pour tout t différent de 0 et annule la somme.

pour $t=0$ il reste :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x).\delta_0(t)\,dt$$

$\boldsymbol{f}(x)$ ne dépendant pas de t on le sort de l'intégrale :

$$\ldots. \;=\; \boldsymbol{f}(x)\int_{-\infty}^{\infty} \delta_0(t)\,dt$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt=1$ par définition de la distribution de Dirac.

$$\begin{aligned} \ldots. &= \boldsymbol{f}(x) \times 1 \\ &= \boldsymbol{f}(x) \end{aligned}$$

La « fonction » de Dirac est donc l'élément neutre pour le produit de convolution.

2.2 translation d'une fonction

Attention : ce qui suit n'est rigoureux que dans le cadre des distributions. L'impulsion de Dirac n'est pas à proprement parler une fonction, mais une distribution.

Soit $\boldsymbol{f}(x)$ une fonction et $\delta_a(x)$ une impulsion de Dirac en a. Calculons leur produit de convolution :

$$(\boldsymbol{f} * \delta_a)(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).\delta_a(t)\,dt$$

$\delta_a(t)$ vaut 0 pour tout t différent de a et annule la somme.

pour $t=a$ il reste :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-a).\delta_a(t)\,dt$$

$\boldsymbol{f}(x-a)$ ne dépendant pas de t on le sort de l'intégrale :

$$.... \;=\; \boldsymbol{f}(x-a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,dt$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t)\,dt=1$ par définition de la distribution de Dirac.

$$\begin{aligned} .... &= \boldsymbol{f}(x-a)\times 1 \\ &= \boldsymbol{f}(x-a) \end{aligned}$$

Résultat :

$$(\boldsymbol{f} * \delta_a)(x) \;=\; \boldsymbol{f}(x-a)$$

Le produit de convolution d'une fonction et d'une « impulsion de de Dirac en a » a donc pour effet de translater la fonction de a.

3 Produit de convolution et Transformée de Fourier

3.1 Transformée de Fourier d'un produit de convolution :

Soit deux fonctions $\boldsymbol{f}(t)$ et $\boldsymbol{g}(t)$ dont le produit de convolution est :

$$\mathcal{C}(x) = (\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).\boldsymbol{g}(t)dt$$

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(x)\, e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(x-t).\boldsymbol{g}(t)dt \right) e^{-j\omega t} dt\end{aligned}$$

Soit deux fonctions $\boldsymbol{f}(t)$ et $\boldsymbol{g}(t)$ dont les transformées de Fourier sont (à un facteur multiplicatif près) :

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(t) e^{-j\omega t} dt \tag{1}$$

$$\mathcal{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(t) e^{-j\omega t} dt \tag{2}$$

Calculons le produit (multiplication) de ces transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}(\omega)\,.\mathcal{G}(\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(t) e^{-j\omega t} dt \right) . \left(\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(t) e^{-j\omega t} dt \right) \tag{3}$$

$$= \iint \boldsymbol{f}(t) e^{-j\omega t} \boldsymbol{g}(t') e^{-j\omega t'} dt.dt' \tag{4}$$

posons $\begin{cases} t = x - x^{'} \\ t^{'} = x^{'} \end{cases}$

(et donc $t + t^{'} = x - x^{'} + x^{'} = x$)

$$= \iint \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(t^{'})e^{-j\omega(t+t^{'})}dt.dt^{'}$$

$$= \iint \boldsymbol{f}(x - x^{'}).\boldsymbol{g}(x^{'})\, e^{-j\omega x}dx.dx^{'}$$

$$= \int \left(\int \boldsymbol{f}(x - x^{'}).\boldsymbol{g}(x^{'})dx^{'} \right) e^{-j\omega x}dx$$

$$= \int (\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x)e^{-j\omega x}dx$$

$$= \mathcal{F}[\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}](\omega)$$

En résumé :

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g}](\omega) \;=\; \mathcal{F}(\omega)\,.\mathcal{G}(\omega)$$

La transformée de Fourier du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit (multiplication) des transformées de Fourier de chacune d'elles.

3.2 Transformée de Fourier du produit de deux fonctions :

Soit trois fonctions $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$, et $\boldsymbol{h}(t)$ telles que $\boldsymbol{h}(t)$ soit le produit des deux autres :

$$\boldsymbol{h}(t) \;=\; \boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(t)$$

Calculons la transformée de Fourier de $y(t)$:

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{h}(t)]=\boldsymbol{H}(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5}$$

La transformée de Fourier de $\boldsymbol{f}(t)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{F}(\nu) \;=\; \mathcal{F}[\boldsymbol{f}(t)]$$

La transformée inverse de cette transformée redonne $\boldsymbol{f}(t)$, comme nous l'avons vu :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(t) \;&=\; \mathcal{F}^{-1}[\boldsymbol{F}(\nu)]\\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\nu)e^{j\nu t}d\nu\end{aligned}$$

Remplaçons dans (5) $\boldsymbol{f}(t)$ par cette dernière expression :

$$\boldsymbol{H}(\omega) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(\nu)e^{j\nu t}d\nu\right]\boldsymbol{g}(t)e^{-j\omega t}dt$$

Changeons l'ordre des intégrations et regroupons les exponentielles :

$e^{j\nu t} \times e^{-j\omega t} = e^{j\nu t - j\omega t} = e^{-j(\omega-\nu)t}$

$$\boldsymbol{H}(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\nu)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(t) e^{-j(\omega-\nu)t} dt\right] d\nu$$

La partie entre crochets $[\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(t) e^{-j(\omega-\nu)t} dt]$ n'est autre que la transformée de Fourier $\boldsymbol{G}(\omega-\nu)$ de $\boldsymbol{g}(t)$

$$\boldsymbol{H}(\omega) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\nu)\boldsymbol{G}(\omega-\nu) d\nu$$

Le membre de droite représente le produit de convolution de X et H

En conclusion la transformée de Fourier du produit (multiplication) de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier de ces fonctions.

$$\mathcal{F}[\boldsymbol{f}(t).\boldsymbol{g}(t)] \;=\; \mathcal{F}[\boldsymbol{f}(t)] * \mathcal{F}[\boldsymbol{g}(t)]$$

Nous voici maintenant en mesure de calculer la transformée de Fourier d'un train de sinusoïdes (c'est à dire d'un signal sinusoïdal limité dans le temps, un « bip » quoi!)

Et nous nous permettrons une digression qui nous fera aborder des sujets comme les photons, les particules élémentaires, ou encore le formalisme de la “dualité onde-particule"…