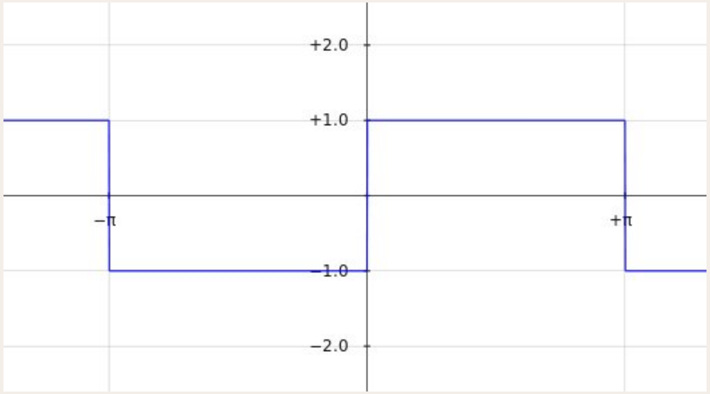
Développement en série de Fourier complexe

Signal carré

1 Graphe :



Nous avons déjà décomposé ce signal par une DSF réelle. Voyons ce que ça donne avec une DSF complexe.

2 Calcul de la DSF

2.1 Rappels concernant la DSF complexe :

nous utilisons ici la lettre j à la place du i des mathématiciens. $j^2 = -1$

$$f(t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

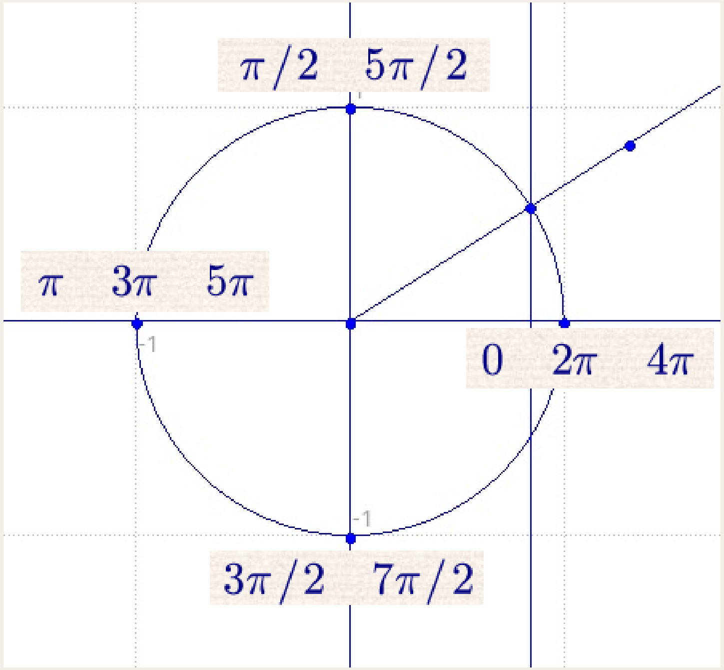
$$\text{avec } C_n \in \mathbb{C}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) \times e^{-jn\omega t}\, dt$$

2.2 cas de notre signal carré :

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} (-1) \times e^{-jn\omega t}\, dt + \int_0^{T/2} (+1) \times e^{-jn\omega t}\, dt\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[(-1)\frac{1}{-jn\omega} e^{-jn\omega t}\right]_{-T/2}^{0} + \left[\frac{1}{-jn\omega} e^{-jn\omega t}\right]_0^{T/2}\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{1}{jn\omega} e^{-jn\omega t}\right]_{-T/2}^{0} + \left[\frac{-1}{jn\omega} e^{-jn\omega t}\right]_0^{T/2}\right) \\
&\quad \text{et sachant que } \frac{1}{j} = -j \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-j}{n\omega} e^{-jn\omega t}\right]_{-T/2}^{0} + \left[\frac{j}{n\omega} e^{-jn\omega t}\right]_0^{T/2}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

rappel :



soit $n \in \mathbb{N}$

pour les cosinus nous avons :

n pair $\Rightarrow \cos(n\pi) = 1$

n impair $\Rightarrow \cos(n\pi) = -1$

et pour les sinus :

$\sin(n\pi) = 0$

$$e^{jn\pi} = \cos(n\pi) + j\sin(n\pi) = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$e^{-jn\pi} = \cos(-n\pi) + j\sin(-n\pi) = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$e^{0} = 1$$

2.2.1 cas n impair ($n = 2k+1$) :

sachant que : $\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ et donc : $\omega T = 2\pi$

si dans l'expression ωt on remplace t par sa valeur $T/2$ c.à.d si on fait $t = T/2$

on obtient $\omega T\,/\,2=\pi$. On va en avoir besoin tout de suite pour finir de résoudre l'intégrale définie.

Nous repartons du résultat vu en (1) plus haut, et détaillons toutes les étapes du calcul, avec des couleurs afin de bien suivre ce qui se passe :

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-j}{n\omega}e^{-jn\omega t}\right]_{-T/2}^{0}+\left[\frac{j}{n\omega}e^{-jn\omega t}\right]_{0}^{T/2}\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-j}{n\omega}e^{0}\right]-\left[\frac{-j}{n\omega}e^{jn\pi}\right]+\left[\frac{j}{n\omega}e^{-jn\pi}\right]-\left[\frac{j}{n\omega}e^{0}\right]\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-j}{n\omega}(1)\right]-\left[\frac{-j}{n\omega}(-1)\right]+\left[\frac{j}{n\omega}(-1)\right]-\left[\frac{j}{n\omega}(1)\right]\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(\left[\frac{-j}{n\omega}\right]-\left[\frac{j}{n\omega}\right]+\left[\frac{-j}{n\omega}\right]-\left[\frac{j}{n\omega}\right]\right)\\
&= \frac{1}{T}\left(\frac{-4j}{n\omega}\right)\\
&= \frac{-4j}{n\omega T}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{-4j}{(2k+1)\omega T}$$

$$\text{sachant que}\, \omega T = 2\pi:$$

$$= \frac{-4j}{(2k+1)2\pi}$$

$$= j\frac{-2}{(2k+1)\pi}$$

ce qui constitue un résultat remarquable par sa simplicité !

(Pour n pair, tout s'annulle).

On remarque que la partie réelle de C_n est nulle, C_n est *imaginaire pur*, donc le développement en série de Fourier à coefficients réels ne comporte que des sinus et de rangs impairs puisque n est impair.

En appliquant la formule de correspondance entre DSF complexe et DSF réel, nous obtenons :

$$a_n = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= -2 \times \text{partie imaginaire de}\, C_n \\ &= -2 \times \frac{-2}{(2k+1)\pi} \\ &= \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{(2k+1)} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc le développement en série de Fourier réelle tel qui nous l'avions précédemment obtenu par le calcul direct :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2k+1} \sin(n\omega t) \right]$$

$$\text{avec } k \in \mathbb{N}$$

Bon maintenant que nous nous sommes bien entraînés, nous pouvons passer aux choses sérieuses, à commencer par la *Transformée de Fourier*.