Série de Fourier Complexe

1 Présentation

Il existe une autre forme de développement d'une fonction en série de Fourier: le développement en série de Fourier complexe, dite aussi sous « forme exponentielle »:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

$$\text{avec } C_n \in \mathbb{C}$$

Nous avons vu que lorsqu'une fonction est paire (ou impaire), son développement en série de Fourier réelle ne comporte que des termes en cosinus (resp. en sinus). Toutefois certaines fonctions, bien que périodiques, ne sont ni paires ni impaires, et dans ce cas il y a à la fois des termes en sinus et en cosinus. Il est alors plus simple pour ces fonctions de calculer le développement en série de Fourier complexe. On en déduit ensuite simplement les coefficients de la transformée réelle.

2 Calcul des coefficients complexes C_n

Procédons d'une manière analogue à celle utilisée pour le calcul des coefficients réel, à savoir l'intégration sur une période du produit de $f(t)$ par (en l'occurence) une exponentielle complexe de la fréquence concernée (avec un petit signe « $-$ » pour que ça marche du premier coup ! ce qui revient en fait à diviser...) :

Soit la période T telle que $\omega T = 2\pi$ comme vu à maintes reprises.

rappel : $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et $\omega = 2\pi f$ avec f en Hertz et ω pulsation en radians/seconde.

La somme comprend toutes les fréquences (pulsations) multiples de ω (c'est à dire les $n\omega$) alors que nous multiplions l'ensemble par une seule pulsation $p\omega$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(t) \times e^{-jp\omega t}\, dt &= \int_a^{a+T} \left(e^{-jp\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\omega t} \right) dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_a^{a+T} C_n\, e^{jn\omega t} \times e^{-jp\omega t}\, dt \\
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_a^{a+T} e^{j\omega(n-p)t}\, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{-j}{(n-p)\omega} e^{j\omega(n-p)t} \right]_a^{a+T} \\
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(n-p)\omega} \left(e^{j\omega(n-p)(a+T)} - e^{j\omega a(n-p)} \right) \\
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(n-p)\omega} \left(e^{j\omega(n-p)+j2\pi(n+p)} - e^{j\omega a(n-p)} \right) \\
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(n-p)\omega} \left(e^{j\omega a(n-p)} \times e^{j2\pi(n-p)} - e^{j\omega a(n-p)} \right)
\end{aligned}
$$

or nous savons que :

$$
e^{jx} = \cos x + j \sin x
$$

et en particulier :

$$
\begin{aligned}
e^{j2\pi(n-p)} &= \cos 2\pi(n-p) + j \sin 2\pi(n-p) \\
&= 1+0=1
\end{aligned}
$$

2.1 cas $n \neq p$

Notre intégrale devient :

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(t) \times e^{jp\omega t}\, dt &= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(n-p)\omega} (e^{j\omega a(n-p)} - e^{j\omega a(n-p)}) \\
&= C_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-j}{(n-p)\omega} \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc dans le cas où $n \neq p$ l'intégrale est nulle.

Mais ce n'est pas le cas si $n = p$:

2.2 cas $n = p$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+T} f(t) \times e^{-jp\omega t} &= \int_a^{a+T} C_n\, e^{j\omega pt} \times e^{-j\omega pt} \\
&= C_n \int_a^{a+T} e^{j\omega pt - j\omega pt} \\
&= C_n \int_a^{a+T} e^{0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_n \int_a^{a+T} 1 \\
&= C_n \left[t\right]_a^{a+T} \\
&= C_n(a+T-a) \\
&= C_n T
\end{aligned}
$$

Nous en déduisons la valeur des coefficients C_n

$$C_n \;=\; \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) \times e^{-jn\omega t}\, dt$$

Rappelons que $e^{-jn\omega t} = \cos\left(n\omega t\right) - j\sin\left(n\omega t\right)$

Remarque :

$$C_0 \;=\; \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t) \times e^{0}\, dt$$

$$= \; \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, dt$$

C_0 est donc la valeur moyenne de la fonction.

2.3 Correspondance entre les coefficients DSF réels et DSF complexes :

DSF réelle	DSF complexe
$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$ $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t).dt$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t).dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$ $C_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\times e^{-jn\omega t}\,dt$ $= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos n\omega t - j\sin n\omega t.dt$ $C_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt$

Nous en déduisons les relations suivantes :

$$C_0 = a_0$$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

Et dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} a_0 &= C_0 \\ a_n &= 2 \times \text{partie reelle}(C_n) \\ b_n &= 2 \times \text{partie imaginaire}(C_n) \end{aligned}$$