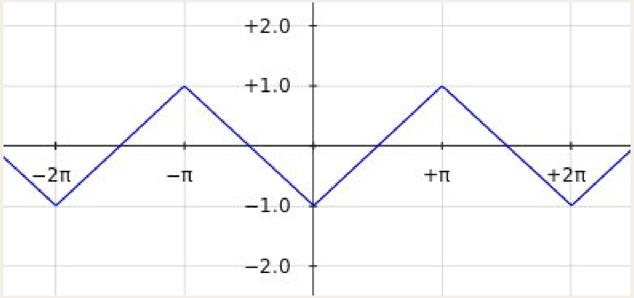
Série de Fourier

signal triangulaire

Décomposons maintenant le signal triangulaire, comme nous l'avons fait pour le signal carré.

1 Graphe :



Le signal triangulaire en question est symétrique et ne comporte pas de fronts raides au contraire du « signal en dent de scie »

Cette fonction étant paire $(f(-t) = f(t))$, elle se décompose en une série de Fourier ne comprenant que des termes en cosinus :

$$f(t) \;=\; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\omega t\right)\right]$$

La valeur moyenne de la fonction étant nulle, a_0 est nul.

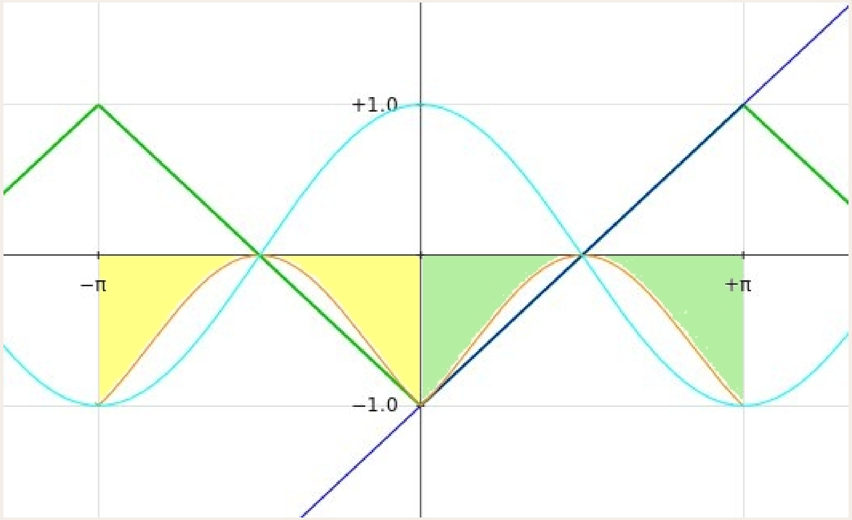
1.1 Calcul des coefficients a_n

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t).dt$$

L'intervalle $[-T/2, T/2]$ correspond à une période complète.

1.1.1 Astuce simplificatrice :

Puisque la fonction est symétrique par rapport à l'axe vertical en $t = 0$ (elle est paire), on peut calculer l'intégrale définie sur l'intervalle $[0, T/2]$ soit une demi période et multiplier par deux le résultat obtenu pour obtenir l'intégrale définie de $[-T/2, T/2]$



Sur la figure ci-contre, nous avons :

$$\begin{cases} \text{courbe en vert} = \text{notre signal trianglulaire} \\ \text{en bleu} : \cos(t) \\ \text{surface en vert} : l'\text{intégrale sur } [0, T/2] \\ \text{surface en jaune} : l'\text{intégrale sur } [-T/2, 0] \end{cases}$$

On peut écrire, **dans ce cas :**

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \times \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t).dt \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t).dt \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

avec $f(t) = 4\frac{t}{T} - 1$ pour $t \in [0, T/2]$

en effet (voir la figure pour la détermination de l'équation de cette droite) :

$$\begin{aligned} f(T/2) &= 1 \\ f(0) &= -1 \\ f(t) &= f(0) + f'(t).t \\ &= -1 + \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} t \\ &= -1 + \frac{1-(-1)}{T/2-0} t \\ &= 4\frac{t}{T} - 1 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} (4\frac{t}{T} - 1) \times \cos{(n\omega t)}.dt$$

Rappel - Intégration par parties :

$$\int_a^b g(x)\, h'(x).dx = [g(x)\, h(x)]_a^b - \int_a^b g'(x)\, h(x)\, .dx$$

posons :

$g(t) = 4\frac{t}{T} - 1 \qquad g'(t) = \frac{4}{T}$

$h'(t) = \cos{(n\omega t)} \qquad h(t) = \frac{1}{n\omega}\sin{(n\omega t)}$

si n est impair nous avons :

$$a_n = \frac{4}{T}\left(\left[(4\frac{t}{T} - 1)\Big(-\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\Big)\right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \frac{4}{n\omega T}\sin(n\omega t)\right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(\left[-\frac{4}{n\omega} \times \frac{t}{T}\sin n\omega t + \frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{T/2} - \left[\frac{-4}{n^2\omega^2 T}\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2}\right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(\left[-\frac{4}{n\omega} \times \frac{1}{2} \sin n\pi + \frac{1}{n\omega} \sin n\pi \right] - 0 + \left[\frac{4}{n^2\omega^2 T} \cos(n\omega t) \right]_0^{T/2} \right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(0 + \frac{4}{n^2\omega^2 T} \cos(n\pi) - \frac{4}{n^2\omega^2 T} \cos 0 \right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(\frac{4}{n^2\omega^2 T} \times (-1) - \frac{4}{n^2\omega^2 T} \times 1 \right)$$

$$= \frac{4}{T}\left(\frac{-8}{n^2\omega^2 T} \right)$$

$$= \frac{-8 \times 4}{n^2(\omega T)^2}$$

$$= \frac{-8 \times 4}{n^2 4\pi^2}$$

$$= -\frac{8}{\pi^2} \times \frac{1}{n^2}$$

sachant que: $\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ donc: $\omega T = 2\pi$ et $n\omega\frac{T}{2} = n\pi$

Si n est pair, le (-1) écrit en violet devient (+1) ce qui annule le coefficient a_n correspondant.

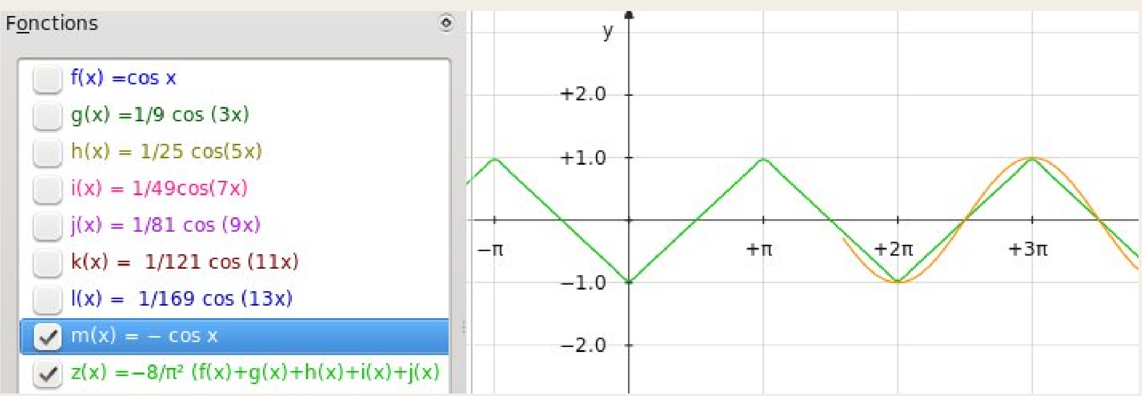
Il n'y a donc que des harmoniques impairs pour ce signal triangulaire.

Le série de Fourier de notre signal triangulaire est donc la suivante :

$$F(t) \quad = \quad -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(n\omega t)\right]$$

avec $k \in \mathbb{N}$

Voici le graphe de cette fonction synthétisé avec le logiciel libre Kmplot our Linux



On voit que la série converge très rapidement vers la fonction triangulaire.

Il faut dire qu'elle est très proche de la fonction cosinus.

1.2 Autre méthode de calcul :

Ce signal triangulaire n'est autre que la primitive du signal carré étudié précédemment, et dont nous connaissont la série de Fourier. Et comme une série de Fourier est une somme de termes, rien de plus simple que d'en calculer l'intégrale.

Toutefois ce n'est pas la primitive de n'importe quelle fonction rectangulaire, et certainement pas de celle d'amplitude $+/-1$!

La dérivée de notre signal triangulaire (c'est à dire la pente du triangle) doit être égale (par définition) à la valeur crête de la fonction rectangulaire.

La fonction triangulaire, nous l'avons vu plus haut peut s'écrire pour pour $t\in[0,T/2]$

$f(t)=4\frac{t}{T}-1$

Nous avons déjà calculé cette dérivée plus haut :

$\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}=\frac{4}{T}$

Donc notre fonction triangulaire est la primitive de la fonction rectangulaire de valeur crête $\frac{4}{T}$ ce qui aboutit à un calcul nettement plus simple :

Nous pouvons donc écrire, sachant que $\omega=2\pi/T$:

$$f(t) \;=\; \frac{4}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int\frac{4}{T}\times\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{2k+1}\sin\left(n\omega t\right).dt\right]$$

$$= \frac{4}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi\omega}\times\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(n\omega t\right)\right]$$

$$= \frac{4}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{2T}{\pi^2}\times\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(n\omega t\right)\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\left(n\omega t\right)\right]$$

$$\text{avec}\; k\in\mathbb{N}$$

Après ça vous me direz que ce n'est pas beau les Maths ? Mais ce n'est pas tout :

Remarque : calcul de pi

Si on fait $\omega = 0$ on obtient $f(t) = f(0) = -1$ (constante)

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\cos 0\right] \\ &= -\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\right] \end{aligned}$$

puisque $\cos 0 = 1$.

continuons :

$$\begin{aligned}
\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\right] &= 1 \\
\frac{8}{\pi^2} &= 1/\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\right] \\
\frac{\pi^2}{8} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2k+1)^2}\right] \\
&= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\ldots
\end{aligned}$$

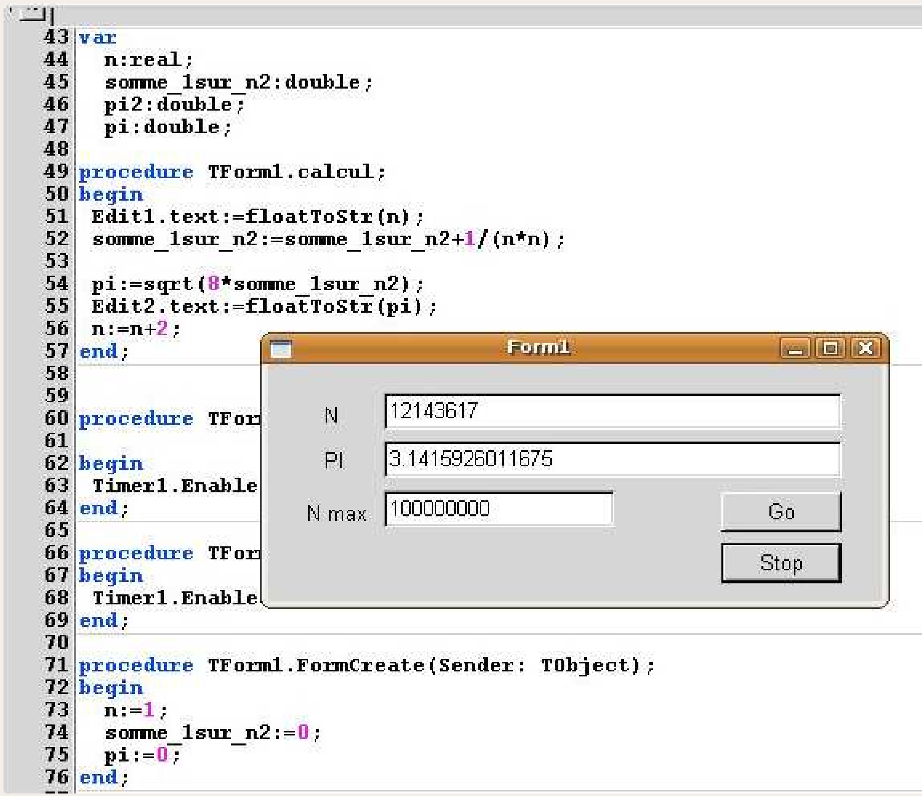
Ce qui conduit directement à une méthode simple pour calculer π :

$$\pi = \sqrt{8\times\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots\right)}$$

Quand je vous promettais une surprise, celle-là on ne l'avait pas vu venir, n'est-ce pas ?

Mais à propos, est-ce bien exact ?

J'ai programmé (en 2009, et vite fait...) une petite application en Pascal [sous le logiciel libre Lazarus (equiv. Open Source de Delphi) pour Linux] qui calcule cette suite en boucle et voici le résultat après l'avoir laissé tourner $15\,\text{mn}$ sur un Duron $4\ \text{GHz}$ et effectué douze millions de pas : (on peut faire beaucoup mieux, j'ai mis un timer 1ms pour pouvoir observer le défilement des décimales, c'est amusant...)



Soit 8 chiffres significatifs exacts, (3.1415926) sachant que pour obtenir les suivants (qui étaient en cours d'évolution sur cette copie d'écran) il suffit de laisser tourner plus longtemps.