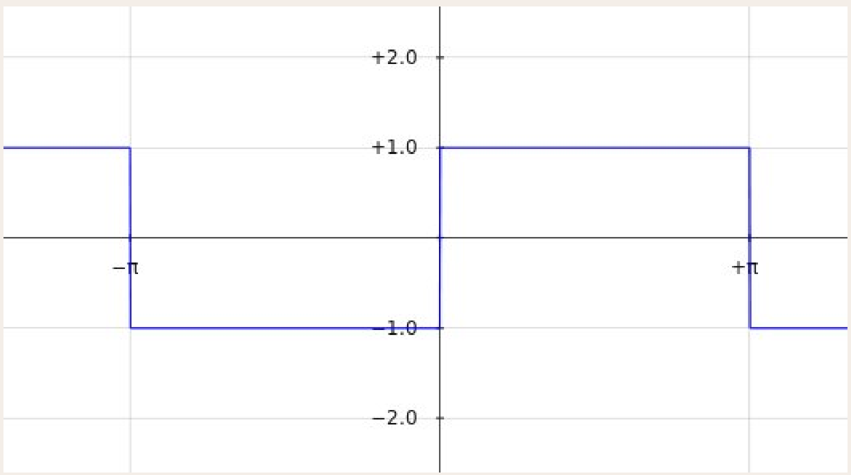
Série de Fourier

Signal carré

1 Graphe

Soit la fonction périodique « rectangulaire » (dite aussi « signal carré ») représentée sur la figure suivante.



C'est la fonction que nous avions obtenue lors de notre approche graphique des série de Fourier

2 Calcul de la SF

Cette fonction étant impaire $(f(-t) = -f(t))$, elle se décompose en une série de Fourier ne comprenant que des termes en sinus :

$$f(t) \;=\; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin\left(n\omega t\right) \right]$$

La valeur moyenne de la fonction étant nulle, a_0 est nul.

Calculons les coefficients b_n en appliquant les résultats obtenus précédemment :

$$b_n \;=\; \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(n\omega t\right).dt$$

L'intervalle $[-T/2, \, T/2]$ correspond à une période complète.

2.1 Calcul des coefficients b_n

$$b_n \;=\; \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(n\omega t\right).dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}\left(-1\right) \times \sin\left(n\omega t\right).dt + \int_{0}^{T/2}\left(1\right) \times \sin\left(n\omega t\right).dt\right)$$

L'astuce, vous l'aurez remarqué, consiste à scinder l'intégrale en deux parties, pour lesquelles la fonction $f(t)$ a une valeur analytique bien déterminée (constante en l'occurence, 1 et -1).

Continuons,

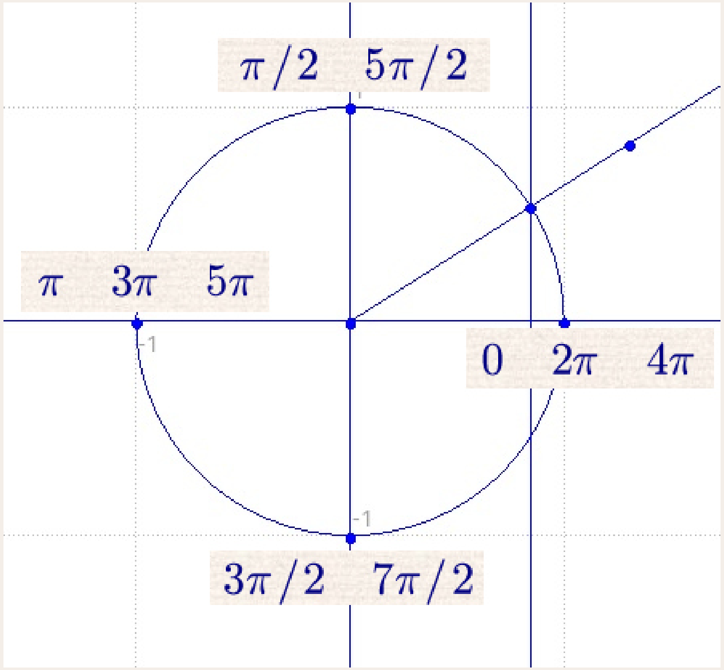
sachant que : $\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$ et donc : $\omega T = 2\pi$

$$b_n = \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\cos\left(n\omega t\right)\right]_{-T/2}^{0} + \left[\frac{-1}{n\omega}\cos\left(n\omega t\right)\right]_{0}^{T/2}\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\cos\left(0\right) - \frac{1}{n\omega}\cos\left(-n\pi\right)\right] - \left[\frac{1}{n\omega}\cos\left(-n\pi\right) - \frac{1}{n\omega}\cos(0)\right]\right)$$

Le résultat diffère selon que n est pair ou impair :

en effet : $\begin{cases} n \text{ pair} \Rightarrow \cos\left(n\pi\right) = 1 \\ n \text{ impair} \Rightarrow \cos\left(n\pi\right) = -1 \end{cases}$



En cas de doute on m'a appris le réflexe

de griffonner un petit cercle trigonométrique

pour vérifier facilement ce genre de chose.

Les $\cos$ sont sur l'axe horizontal,

les $\sin$ sur l'axe vertical.

← fig réalisée avec Kig + TeXmacs + Gimp sous Linux

2.1.1 Cas n pair:

$(n = 2k\,;k \in \mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{2k\omega}\cos(0) - \frac{1}{2k\omega}\cos(-2k\pi)\right] - \left[\frac{1}{2k\omega}\cos(-2k\pi) - \frac{1}{2k\omega}\cos(0)\right]\right)\\
&= \frac{2}{T}\left(\left[\frac{1}{2k\omega}(1) - \frac{1}{2k\omega}(1)\right] - \left[\frac{1}{2k\omega}(1) - \frac{1}{2k\omega}(1)\right]\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Donc il n'y a pas d'harmoniques de rang pair pour cette fonction carrée.

2.1.2 Cas n impair:

(n=2k+1)

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\left([\frac{1}{n\omega}(1)-\frac{1}{n\omega}(-1\Big)]-[\frac{1}{n\omega}(-1)-\frac{1}{n\omega}(1)]\right) \\ &= \frac{2}{T}(\frac{2}{n\omega}+\frac{2}{n\omega}) \\ &= \frac{2}{T}(\frac{4}{n\omega}) \\ &= \frac{4}{\pi}\times\frac{1}{n} \end{aligned}$$

puisque $\omega=2\pi F=\frac{2\pi}{T}$ et donc $\omega T=2\pi$

Nous obtenons la série de Fourrier suivante, pour ce signal carré:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{n}\sin(n\omega t)\right]$$

$$\text{avec} : n=2k+1\,;\,k\in\mathbb{N}$$

ou encore :

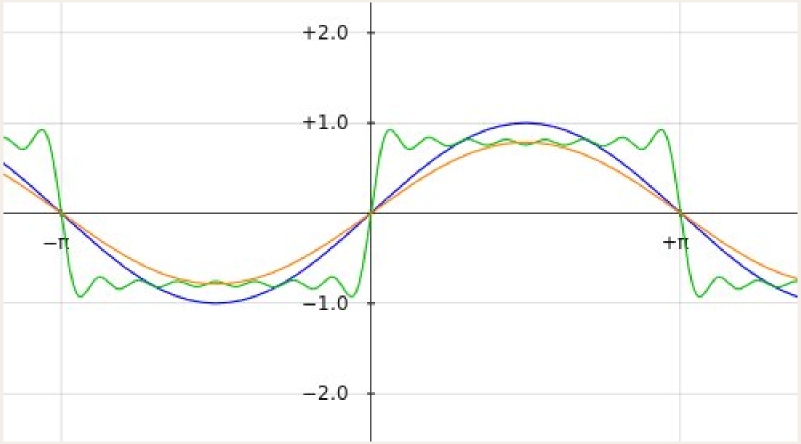
$$f(t) \ = \ \frac{4}{\pi}(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \frac{1}{7}\sin 7\omega t + ...)$$

Remarques :

Le facteur $4\,/\,\pi$ montre que l'amplitude de la fréquence fondamentale est un peu supérieure à celle de la fonction carrée obtenue.

Nous retrouvons bien les amplitudes en $1\,/\,n$ et les harmoniques de rang n impairs uniquement, comme nous l'avions proposé lors de l'approche graphique.

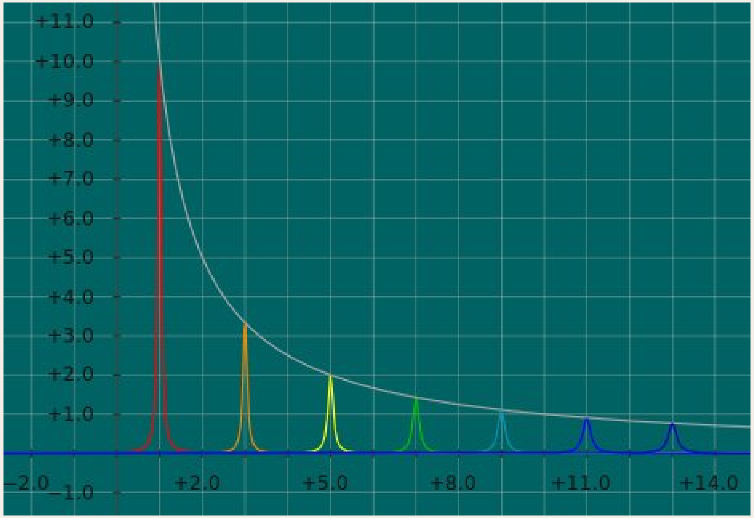
Voici d'ailleurs cette synthèse graphique à laquelle j'ai rajouté une sinusoïde d'amplitude $\pi\,/\,4 = 0.7853...$ (en orange) qui vient en effet tangenter le signal carré (elle ne figure bien sûr pas dans la somme).



On remarquera les petites cornes à proximité de la discontinuité de la fonction. On pourrait penser qu'elles disparaissent lorsque le nombre de composantes augmente, il n'en est rien. C'est ce qu'on appelle le phénomène de Gibbs. Voir à ce propos l'article sur Wikipédia.

3 Spectre du signal

L'ensemble des amplitudes de la fondamentale et des harmoniques en fonction de la fréquence peut être représenté sur un graphique que l'on appelle le spectre en fréquence du signal.



Voici ce spectre (dessiné) pour notre signal carré. Les amplitudes décroissent suivant une courbe en $1/f$.

En musique c'est la forme des signaux sonores et donc le contenu spectral qui constitue le timbre d'un instrument. C'est également ce qui permet de reconnaître les voix, et même ce qui (entre autre) permet de discerner l'information contenue dans le langage parlé, en ce qui concerne l'espèce humaine en tous cas. Les oiseaux quant à eux semblent plutôt utiliser des fréquences relativement pures et des rythmes, mais ô combien variées et glissantes !

En électronique, l'appareil de mesure qui permet de visualiser ce spectre s'appelle un analyseur de spectre. Il peut être conçu suivant le principe mathématique à la base du calcul analytique des coefficients a et b, à savoir une multiplication du signal par un signal sinusoïdal de fréquence ajustable et connue puis une intégration qui peut être réalisée par un filtre passe bas ou un filtre de bande étroit centré sur la fréquence d'analyse. Un signal wobulé (à fréquence glissante) permet d'obtenir un balayage continu du spectre sur un écran d'oscilloscope. Il est également possible de numériser le signal à analyser et d'effectuer une **transformée de Fourier dite “rapide ” (FFT)** grâce à une astuce conceptuelle. **J'y reviendrai en détail**.

Les transformées de Fourier (qui sont une extension des séries de Fourier pour les signaux non périodiques) ne sont pas *que* fréquentielles, elle peuvent aussi être spatiales, pour le traitement d'images par exemple.

Les transformées de Fourier constituent le domaine de l'analyse harmonique qui est une branche des mathématiques.