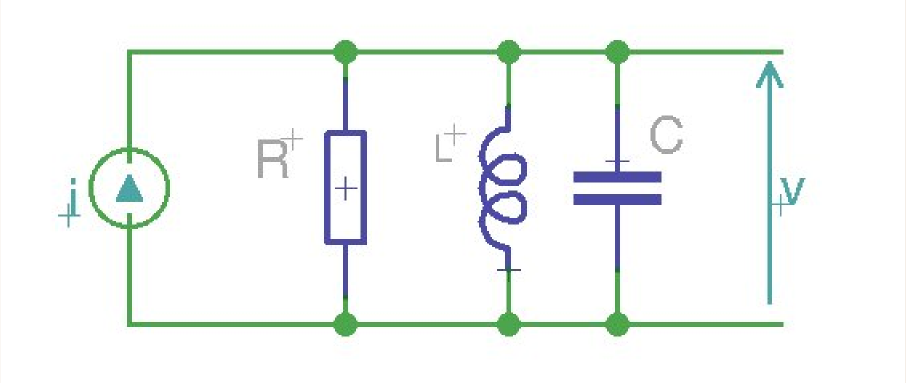
Circuit RLC // alimenté en courant

Circuit résonnant parallèle dit « circuit bouchon »

Soit le circuit suivant, alimenté en courant (par exemple par le courant collecteur d'un transistor).



Ce « circuit bouchon » est constitué :

- d'une inductance
- une capacité
- une résistance

le tout en parallèle.

1 Calcul de la tension v en fonction du courant i

$$v = \frac{i}{1/Z}$$

avec les impédances complexes:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

$$\begin{aligned} v &= i/(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{j\omega\,\mathrm{L}} + j\omega\,\mathrm{C}) \\ &= i\,j\omega\mathrm{L}/(1 + j\omega\,\frac{L}{R} + (j\omega)^2\,\mathrm{LC}) \end{aligned}$$

on pose : $\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}} \\ m = \frac{1}{2\mathrm{R}}\sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$

ce qui donne :

$$j\omega\,\frac{L}{R} \;=\; j\,\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$$

$$= \; j\,\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{L}{R} \times \frac{(\sqrt{L})^2}{\sqrt{L}.\sqrt{C}}$$

$$= \; j\,\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{L}{R} \times \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}}$$

$$= \; j\,\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{L}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$= \; 2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}$$

ainsi que:

$$j\omega\mathrm{L} = 2mj\frac{\omega}{\omega_0}\mathrm{R}$$

Nous replaçons ces résultats dans la formule de la tension :

$$
\begin{aligned}
v &= \mathrm{R}i\frac{2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\
&= \mathrm{R}\,i\frac{2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}
\end{aligned}
$$

1.1 Fonction de transfert $T = \frac{v}{Ri}$:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\,jm\,\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2\,jm\,\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2jm\,\frac{\omega}{\omega_0}}+1+\frac{(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}{2\,jm\,\frac{\omega}{\omega_0}}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2jm\,\frac{\omega}{\omega_0}}+1+\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{2m}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{2mj\,\frac{\omega}{\omega_0}}+\frac{1}{2m}j\frac{\omega}{\omega_0}}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}\times\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}+\frac{1}{2m}j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}\times\frac{1}{j}\times\frac{\omega_0}{\omega}+\frac{1}{2m}j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

rappel :

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ j\times j &= -1 \\ j &= -\frac{1}{j} \end{aligned}$$

ce qui va nous permettre de simplifier les choses.

de retour en cuisine :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}\times\frac{1}{j}\times\frac{\omega_0}{\omega}+\frac{1}{2m}j\frac{\omega}{\omega_0}} \\ & \frac{1}{1-\frac{1}{2m}j\frac{\omega_0}{\omega}+\frac{1}{2m}j\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{2m}j\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

on voit ici que la partie imaginaire s'annule pour $\omega=\omega_0$ et que $T_0=1$

1.2 Résonance pour $\omega = \omega_0$:

si nous faisons $\omega = \omega_0$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left|v\right|_0 &= \mathrm{R}i\frac{2mj}{1+2mj-(1)^2} \\ &= \mathrm{R}\,i\,\frac{2mj}{2mj} \\ &= \mathrm{R}\,i \end{aligned}$$

à la résonance le circuit se comporte comme s'il était constitué de la seule résistance R.

La partie imaginaire de la formule disparaît, du coup la tension se trouve en phase avec le courant.

Remarque. Si R est très grand la tension à la fréquence de résonance sera très grande.

C'est le cas si la résistance R est physiquement omise, dans ce cas il ne susbsite qu'un r correspondant au pertes des composants (diélectrique dans C, magnétique dans L, rayonnement, fils des connections de résistance non nulle etc...) Mais si l'on s'y prend bien (choix des composants optimisé), ce r sera effectivement très grand et la tension à la résonance poura l'être également. Toutefois la bande passante (voir plus bas) sera étroite ce qui n'est pas toujours souhaité, dans ce cas la résistance sera volontairement placée.

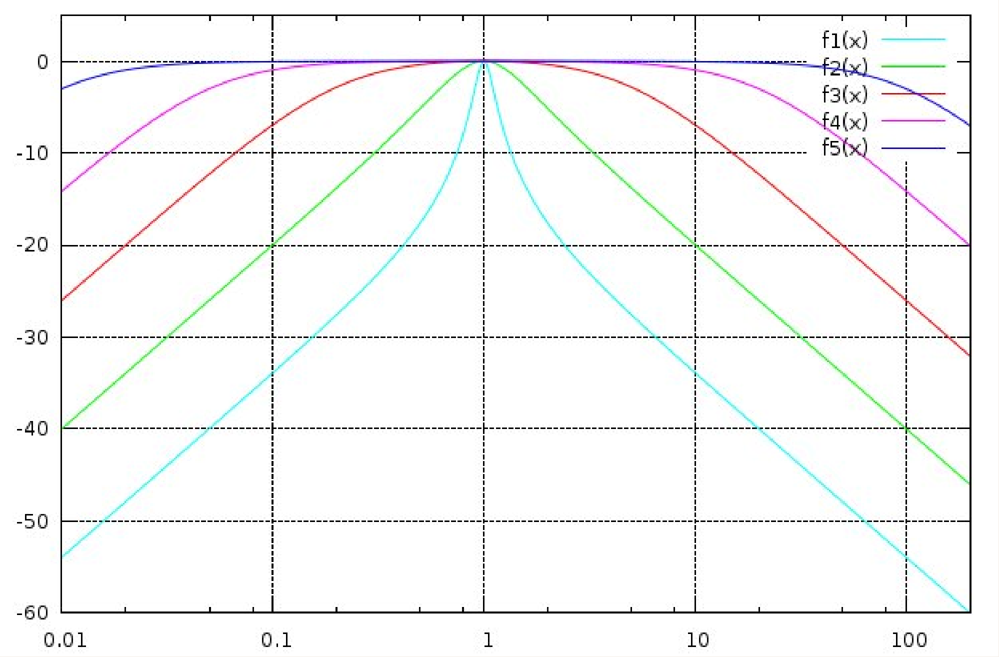
La valeur très grande de l'impédance à la résonance de ce circuit le fait employer en série pour bloquer un signal de fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, ce qui lui vaut l'appellation de « circuit bouchon ».

1.3 Calcul du module de T(en dehors de la fréquence de résonance) :

posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

$$|T| = \left| \frac{2mj\frac{\omega}{\omega_0}}{1+2mj\frac{\omega}{\omega_0}-(\frac{\omega}{\omega_0})^2} \right| = \frac{2mx}{\sqrt{(1-x^2)^2+(2mx)^2}}$$

1.3.1 Diagramme de Bode :



En abscisses, $x = \omega\,/\,\omega 0$ en échelle log

En ordonnées $20\,\mathrm{Log}\,(v\,/\,\mathrm{Ri})$

Les pentes de part et d'autre de la résonance

sont de $20\mathrm{dB}$/décade.

Les différentes courbes correspondent

à différentes valeurs de m.

Plus m est petit, plus la bande passante se rétrécit.

Listing pour le tracé avec GNUplot :

```
set samples 1000
set xrange [0.01: 200]
set yrange [-60: 5]
set logscale x
set grid
m1=0.1
m2=0.5
m3=2.5
m4=10
m5=50
f1(x)=20*log10 (2*m1*x/sqrt( (1-x**2)**2 +(2*m1*x)**2))
f2(x)=20*log10 (2*m2*x/sqrt( (1-x**2)**2 +(2*m2*x)**2))
f3(x)=20*log10 (2*m3*x/sqrt( (1-x**2)**2 +(2*m3*x)**2))
f4(x)=20*log10 (2*m4*x/sqrt( (1-x**2)**2 +(2*m4*x)**2))
f5(x)=20*log10 (2*m5*x/sqrt( (1-x**2)**2 +(2*m5*x)**2))
plot f1(x) with lines lt 5 ,f2(x) with lines lt 2 ,f3(x) with lines lt 1 ,f4(x) with lines lt 4 ,f5(x) with lines lt 3
```

1.3.2 Diagramme de Nyquist

C'est la représentation de la fonction de transfert dans le plan complexe lorsque la fréquence varie de $]0 \rightarrowtail \infty[$

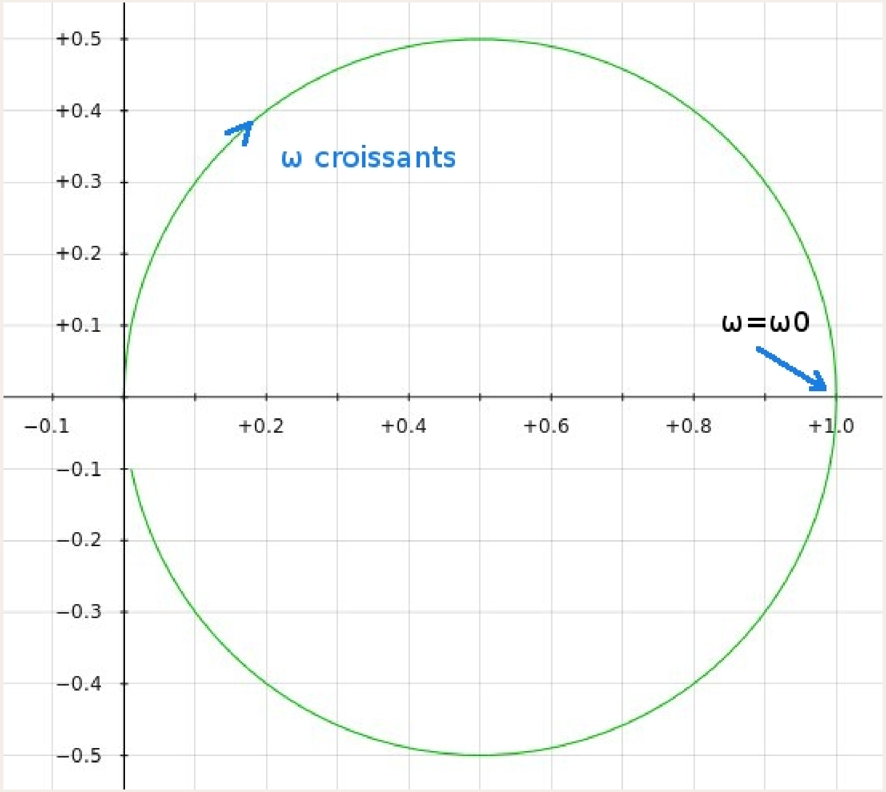
$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{2m} j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

considérons la fonction $\frac{1}{T} = 1 + \frac{j}{2m} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

sa partie réelle est constante, $=1$

seule sa partie imaginaire $\frac{j}{2m}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$ varie. Sa représentation dans le pla complexe est donc une droite verticale passant par 1.

La représentation de T qui est son inverse, sera donc l'inversion de cette droite, c'est un cercle passant par 0 et par 1.



Courbe paramétrique de la fonction de transfert dans le plan complexe, avec en abscisses, la partie réelle et en ordonnées sa partie imaginaire, en fonction du paramètre $x = \omega / \omega 0$