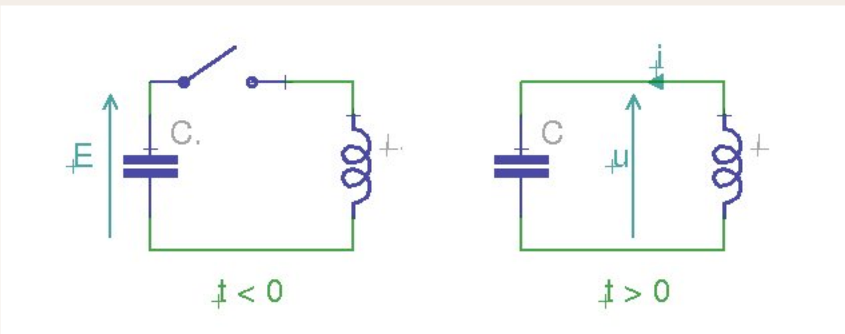
Oscillateur harmonique

Un exemple classique d'oscillateur harmonique en mécanique est constitué par une masse suspendue sous un ressort.

Nous allons étudier son équivalent en électronique : un condensateur préalablement chargé que l'on connecte aux bornes d'une « self » (inductance).



Soit donc le schéma ci-contre, constitué par un condensateur parfait (sans pertes ni résistance série) et une self parfaite (bobine constitué par l'enroulement d'un fil de résistivité nulle, et sans perte par rayonnement.

On suppose le condensateur préalablement chargé par une tension E, par un moyen qui importe peu et qui n'est pas représenté ici. A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Que se passe-t-il ?

La résistance en continu de la bobine étant nulle et le condensateur parfait, on pourrait penser que la fermeture de l'interrupteur va provoquer un court-circuit au conséquences inimaginables sur le plan conceptuel ! Il n'en est rien : en effet dès qu'un courant s'établit, il ne peut le faire, partant de zéro, qu'en augmentant d'intensité. Et cette augmentation de l'intensité, qui n'a justement rien d'un courant continu, provoque une self-induction dans la bobine qui s'oppose à son établissement. L'augmentation de ce courant, et par conséquence l'intensité restera dans des valeurs finies et parfaitement calculables.

C'est ce que je vous propose de calculer maintenant : la valeur et l'allure du courant i et de la tension u en fonction du temps.

Note. Voir également la page sur la charge d'un condensateur où je détaille un peu plus le comportement d'un condensateur. Le point représente une multiplication, tout comme le signe $\times$.

1 Calcul

Concernant le condensateur nous pouvons écrire :

$$dq = \mathrm{C}\,.du$$

$$dq = i\,.dt$$

donc

$$c.du = i.dt$$

$$i = \mathrm{C}\frac{du}{dt} = \mathrm{C}.u'$$

et concernant la self nous avons:

$$u = L\frac{di}{dt} = L.i'$$

(pas de signe « $-$ » compte tenu du sens du courant que j'ai choisi *vers le condensateur*)

On obtient :

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{L}.i' \\ &= \mathrm{L} \times [\mathrm{C}.u']' \\ &= \mathrm{LC}\, u'' \end{aligned}$$

avec $u'' = \frac{d^2\, u}{dt^2}$

on pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}$

Nous obtenons *l'équation différentielle du second ordre* suivante :

$$u'' - \omega_0^2\, u = 0$$

dont nous connaissons l'ensemble des solutions:

$$u(t) = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$$

qui peut s'écrire :

$$u(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Il s'agit d'un **signal sinusoïdal** d'amplitude A et de « pulsation » ω_0 (en radians / seconde)

Sa fréqence est : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (en Hertz) puisque $\omega = 2\pi f$

Les physiciens écrivent plus volontier ν (lettre grecque « nu ») pour la fréquence.

Reste à calculer $A\,\mathrm{et}\,\varphi$ en fonction des conditions initiales, qui sont :

à $t = 0$: $\begin{cases} u(0) = E \\ i(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 0 &= i(0) \\ &= \mathrm{C}.u'(0) \\ &= -AC\omega_0 \sin(0 + \varphi) \\ &= -AC\omega_0 \sin\varphi \end{aligned}$$

A, C et ω_0 n'étant pas nuls, nous en déduisons que $[\sin(\varphi) = 0] \Longrightarrow \varphi = 0$

l'équation devient :

$$u(t) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t)$$

à partir de ce résultat on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= u(0) \\ &= \mathrm{A}\cos(0) \\ &= \mathrm{A}\times 1 \\ &= \mathrm{A} \end{aligned}$$

L'équation de la tension devient donc :

$$u(t) = \mathrm{E}\cos(\omega_0 t)$$

et celle du courant :

$$i(t) = -\mathrm{C}\,\omega_0\ \mathrm{E}\ \sin(\omega_0 t)$$

Remarque:

$\omega_0 \mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{LC}}} = \frac{(\sqrt{\mathrm{C}})^2}{\sqrt{\mathrm{L}}\sqrt{\mathrm{C}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{L}}}$

on peut donc écrire i sous la forme :

$$i(t) = -\,\mathrm{E}\ \sqrt{\frac{C}{L}}\sin(\omega_0 t)$$

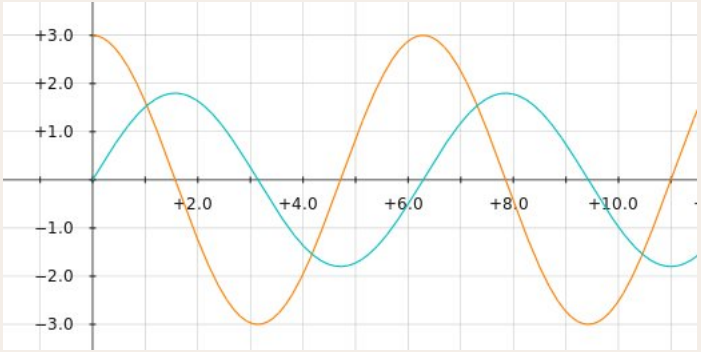
2 Analyse dimensionnelle :

On vérifie que ω étant homogène à t^{-1} (et à $\frac{1}{\mathrm{RC}}$) , $C\omega$ est homogène à $\frac{C}{\mathrm{RC}}$ donc à $\frac{1}{R}$

et par conséquent $C\omega E$ est homogène à $\frac{U}{R}$ donc à i

Ces équations un peu « bizarres » donnant l'intensité sont donc homogènes.

3 Tracé de la tension et de l'intensité en fonction du temps :



Voici en orange la courbe de la tension, et en bleu celle de l'intensité.

On remarquera que le maximum de l'intensité se produit lorsque la tension est nulle.

L'énergie contenue au départ dans le condensateur sous la forme $E = 1/2C.u^2$

se retrouve alors dans la self sous forme $E = 1/2L.i^2$

Il y a un décalage de $\pi/2$ entre la phase de u et celle de i.

Où l'on voit que deux composants passifs (non alimentés en énergie) peuvent produire et entretenir un signal électrique périodique. Toutefois il n'y a ni production ni dissipation d'énergie. L'énergie instantanée (produit de la tension par l'intensité) est tour-à-tour positive, puis négative, si bien que l'énergie moyenne sur chaque période est nulle.