Equations différentielles d'ordre 2

1 Définitions :

On appelle **équation différentielle linéaire du deuxième ordre** toute équation de la forme :

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)y = u(x)$$

où $a, b, \mathrm{et}\, u$ sont trois fonctions continues et $y'' = [y']'$ (la dérivée de la fonction dérivée)

Si « u » est la fonction nulle, l'équation est dite **homogène**.

On appelle **équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants** toute équation de la forme :

$$y'' + a\,y' + b\,y = 0$$

avec a, b, c réels et a non nul.

2 Résolution

2.1 Cas simple :

Nous allons tout d'abord traiter le cas particulier de l'équation suivante, ne faisant pas apparaitre y' mais seulement la fonction y et sa dérivée seconde y'':

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

c'est à dire $y'' = -\omega^2 y$

nous savons que $\sin'(x) = \cos(x)$ et que $\cos'(x) = -\sin(x)$

donc $\sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$

Nous voyons que nous sommes très près du résultat.

Essayons la fonctions composée $y = \sin(\omega x)$:

$$\begin{aligned}
\sin''(\omega x) &= \omega \times \cos'(\omega x) \\
&= \omega \times \omega \times -\sin(\omega x) \\
&= -\omega^2 \sin(\omega x)
\end{aligned}$$

La fonction $y = \sin(\omega x)$ est donc solution de l'équation différentielle du second ordre

$y'' + \omega^2 y = 0$

Oui mais... La fonction $y = \cos(\omega x)$ est aussi solution de cette équation différentielle :

$$\begin{aligned}
\cos''(\omega x) &= \omega \times -\sin'(\omega x) \\
&= \omega \times \omega \times -\cos(\omega x) \\
&= -\omega^2 \cos(\omega x)
\end{aligned}$$

et plus généralement les fonctions

$y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ sont solutions de cette équation différentielle :

$$\begin{aligned}
[\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)]'' &= \alpha\omega^2 \times -\cos(\omega x) + \beta\omega^2 \times -\sin(\omega x) \\
&= -\omega^2[\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)]
\end{aligned}$$

en outre la fonction $\rho.e^{j\omega x}$ est aussi une solution :

$$\begin{aligned}
[\rho.e^{j\omega x}]'' &= j\omega \times j\omega \times C.e^{j\omega x} \\
&= j^2\omega^2 C.e^{j\omega x} \\
&= -\omega^2\, \rho \times e^{j\omega x}
\end{aligned}$$

puisque $j^2=-1$ (« j » étant le « i » des électroniciens, c'est à dire le nombre imaginaire des nombres complexes, comme vu antérieurement, la lettre « j » ayant été choisie pour éviter la confusion avec le « i » désignant l'intensité du courant électrique).

$\rho.e^{j\omega x}$ est donc aussi solution de cette équation différentielle.

rappel :

$\rho.e^{j\omega x}=\rho\left[\cos(\omega x)+j\sin(\omega x)\right]$ est la forme exponentielle d'un nombre complexe $[\rho,\theta]$

dont ρ est le module (longueur distance au point 0) et θ l'argument (l'angle)

avec dans notre cas $\theta=\omega x$

2.1.1 Remarques:

-Les électroniciens rencontrerons plus fréquemment $\theta=\omega t+\varphi$ avec $\begin{cases} t=\text{temps} \\ \omega=\text{pulsation} \\ \varphi=\text{phase} \end{cases}$

-La fonction $y=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$ est équivalente à $y=A\sin(\omega x+\varphi)$

avec $\begin{cases} A=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \varphi=\text{arctg}(\frac{\alpha}{\beta}) \end{cases}$

-L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ représente donc l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire le plan complexe. Les mathématiciens diront que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension deux, un plan vectoriel.

Si on connait deux solutions qui forment un système libre (toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs implique la nullité des deux coefficients), alors ces deux solutions forment une base du plan vectoriel et la solution générale est la combinaison linéaire des deux solutions qui forment la base: $S = a.s_1 + b.s_2$

Dans notre cas, $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ forment une telle base.

en effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0 \text{ implique} \Longrightarrow \alpha = 0 \textbf{ et } \beta = 0$

Démonstration :

considérons l'expression $[\alpha \sin(x) + \beta \sin(x) = 0]$

$\forall x \in \mathbb{R}$ signifie que nous pouvons prendre le cas $x = 0$:

$\alpha \sin(0) + \beta \sin(0) = 0$

$$\begin{aligned} \alpha \sin(0) + \beta \sin(0) &= 0 \\ \alpha \times 0 + \beta \times 1 &= 0 \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

donc $[\alpha \sin(0) + \beta \sin(0) = 0]$ implique que $\beta = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ signifie que nous pouvons également considérer le cas $x = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha \sin(1) + \beta \sin(1) &= 0 \\ \alpha \times 1 + \beta \times 0 &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

En conclusion $\forall x \in \mathbb{R}\ [\alpha \sin(0) + \beta \sin(0) = 0]$ implique que α ET β doivent être nuls tous les deux.

$\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ forment donc un système libre.

Et puisque $\cos(\omega x)$ et $\sin(\omega x)$ sont toutes deux solution de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, alors ces deux solutions forment une base du plan vectoriel.

La solution générale de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est donc la combinaison linéaire :

$y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$

2.2 Cas général

Equation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coéfficients constants

$$y'' + ay' + by = 0$$

L'équation du second degré:

$$r^2 + \mathrm{ar} + b = 0$$

est appelée *équation caractéristique* de l'équation différentielle homogène.

Soit $\Delta = a^2 - 4b$ le déterminant de l'équation caractéristique.

Trois cas se présentent :

1. $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles distincte

   alors : $y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$

2. $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une seule racine réelle (dite « double »)

   alors: $y = e^{rx}(\lambda x + \mu)$

3. $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes distinctes et conjuguées $\alpha + j\beta$ et $\alpha - j\beta$

   alors: $y = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$ (une sinusoïde croissante ou décroissante)

Dévellopons le cas 3:

$\Delta < 0$

$$\begin{aligned} \Delta &< 0 \\ a^2 - 4b &< 0 \\ \Delta &= -1(4b - a^2) \\ &= j^2(4b - a^2) \end{aligned}$$

racines de $\Delta\begin{cases} j\sqrt{4b-a^2} \\ -j\sqrt{4b-a^2} \end{cases}$

racines complexes de l'équation caractéristique:

$$r_1 = \frac{-a+j\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-a-j\sqrt{4b-a^2}}{2}$$

posons $\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha + j\beta \\ r_2 &= \alpha - j\beta \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ forment la combinaison linéaire suivante

$$y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

autre forme équivalente:

$$\begin{aligned} y1 &= e^{r_1 x} \\ &= e^{(\alpha+j\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} \times e^{j\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + j\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y2 &= e^{r_2 x} \\ &= e^{(\alpha-j\beta)x} \\ &= e^{\alpha x} \times e^{-j\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - j\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

Prenons

- $(y1 + y2)/2$
- (-j)$(y1 - y2)/2$

qui sont deux solutions **réelles** indépendantes comme base de l'espace vectoriel des solutions

$$\begin{aligned} (y1 + y2)/2 &= e^{\alpha x}(\cos\beta x) \\ (y1 - y2)/2j &= e^{\alpha x}(\sin\beta x) \end{aligned}$$

La combinaison linéaire formant l'ensemble des solutions devient:

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\alpha x}\cos\beta x + Be^{\alpha x}\sin\beta x \\ &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \end{aligned}$$

Comme quoi d'une simple égalité entre une fonction et la dérivée de sa dérivée jaillit une oscillation ! Que dis-je? un espace vectoriel d'oscillations à (dé)croissance exponentielle ! Et ça marche ! Les oscillateurs sinusoïdaux (dits “harmoniques") sont basés là-dessus (mais pas les oscillateurs à relaxation).

Nous étudierons ça.