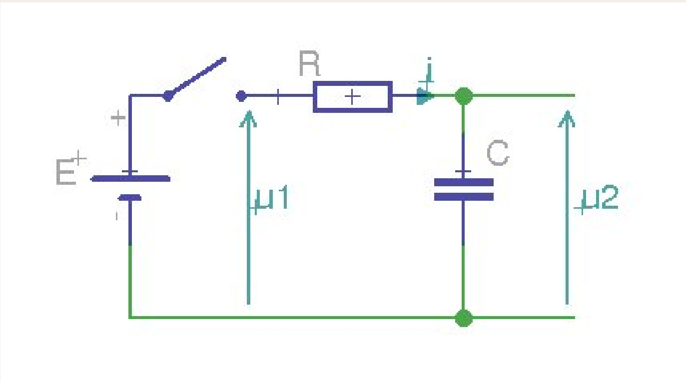
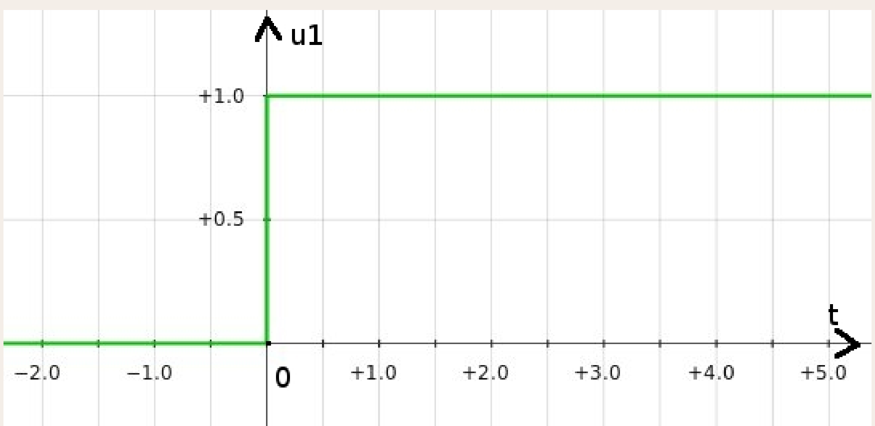
Charge d'un condensateur



Soit le circuit ci-contre constitué d'une source de tension continue de valeur E d'une résistance R, d'un condensateur C et d'un interrupteur.

Avant l'instant $t = 0$ on considère que l'interrupteur est ouvert et que le condensateur est totalement déchargé ($u_2 = 0$).

A l'intant $t = 0$ on ferme l'interrupteur :



La tension $u1$ en amont de la résistance R

Que se passe t-il alors ? Quelle est l'allure de la tension aux bornes du condensateur, en aval de la résistance ?

1 Approche naïve :

Puisque $u_2 = 0$ la totalité de la tension se retrouve aux bornes de la résistance et un courant s'établit donc avec une intensité égale à $i = \frac{E}{R}$

Le condensateur commence donc à se charger, la quantité d'électricité Q qu'il contient augmente suivant la loi $Q = i.t$

la tension u_2 à ses bornes augmente en proportion, suivant la loi

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{Q}{\mathrm{C}} \\ &= \frac{i}{\mathrm{C}}t \end{aligned}$$

La tension augmente *semble-il* proportionnellement au temps.

Seulement ce calcul n'est valable qu'à l'instant $t = 0$

En effet dès que la tension u_2 augmente, la tension aux bornes de la résistance, qui est égale à $E - u_2$ diminue puisque u_2 augmente, et par conséquence le courant $i = \frac{E}{R}$ diminue lui aussi. Et donc u_2 augmente moins vite. Et de moins en moins vite...

Comment calculer de quelle manière varient ce courant et cette tension en fontion du temps ?

En résolvant une **EQUATION DIFFERENTIELLE**.

2 Ce qu'il faut faire :

En fait il ne faut pas écrire $Q = it$ mais considérer les petites variations de Q qu'on appellera dq lorsque le temps augmente d'une toute petite quantité dt et faire tendre ces quantité vers zéro.

on écrira :

$dq = i \times dt$

de même pour la tension en fonction de la charge :

$dq = \mathrm{C} \times du$

ce qui nous donne:

$i \times dt = C \times du$

$$i = C\frac{du}{dt}$$

Nous pouvons également écrire une deuxième équation qui lie tension et intensité (loi d'ohm dans la résistance)

$$i = \frac{\mathrm{E} - u}{\mathrm{R}}$$

En rapprochant ces deux équations, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{E-u}{R} &= C\,\frac{du}{dt} \\ E-u &= \mathrm{RC}\,\frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Tiens il y a une fonction $u(t)$ et sa dérivée $\frac{du}{dt}$ dans la même équation... c'est une équation différentielle du premier degré !

3 Résolution de l'équation différentielle :

3.1 première méthode

Ecrivons-la sous une forme plus habituelle :

$$\mathrm{RC}\,u' + u = \mathrm{E}$$

posons $\tau = \mathrm{RC}$

$$u' + \frac{1}{\tau}\,u = \frac{\mathrm{E}}{\tau}$$

Résolvons l'équation sans second membre associée :

$$u' + \frac{1}{\tau}\,u = 0$$

solution de cette équation sans second membre :

$$u(t) = \mathrm{K}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

la solution générale de l'équation avec second membre devient:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{E}{\tau}(\tau) + \mathrm{K}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \\
&= \mathrm{E} + \mathrm{K}\, e^{-\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}
$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur de la constante K

pour $t = 0$ nous avons :

$$
\begin{aligned}
u(0) &= E + K e^{0} \\
&= E + K \times 1 \\
&= E + K
\end{aligned}
$$

Or nous avons décidé comme condition initiale que au temps $t = 0$ le condensateur était déchargé, donc que $u(0) = 0$

Nous pouvons donc écrire que $E + K = 0$

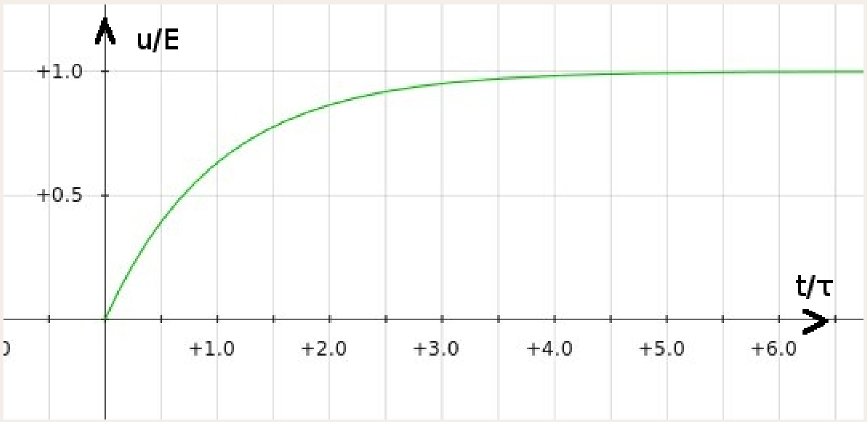
donc $K = -E$

La solution particulière de l'équation différentielle devient :

$$
\begin{aligned}
u(t) &= E - E e^{-\frac{t}{\tau}} \\
&= E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$\begin{cases} \text{si } t < 0 \Rightarrow u(t) = 0 \\ \text{si } t \geqslant 0 \Rightarrow u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases}$$



Courbe « normalisée » du courant en fonction du temps (normalisée en ce sens qu'elle ne représente pas la valeur absolue de E ni la valeur absolue de τ), les graduations sont des nombres sans dimensions (scalaires).

3.2 Seconde méthode : intégration directe

Cette méthode est applicable lorsqu'on a affaire à une équation différentielle du premier ordre dite « à variables séparables », ce qui est le cas ici (on peut séparer les variables temps et tension de part et d'autre du signe égal).

Repartons de l'équation vue plus haut :

$$\mathrm{RC}\,\frac{du}{dt} \;=\; \mathrm{E}-u$$

séparons les variables u et t

$$\frac{du}{\mathrm{E}-u} \;= \frac{dt}{\mathrm{RC}}$$

puis intégrons les deux membres :

$$\int \frac{1}{\mathrm{E}-u}\,du \;= \int \frac{1}{\mathrm{RC}}\,dt+k$$

l'intégrale de $1/x$ étant $\ln(x)$ il vient:

$$-\ln(E-u) \;= \frac{t}{\mathrm{RC}}+k$$

appliquons les conditions initiales: si $t=0$ alors $u=0$ pour trouver la valeur de k

$$-\ln(E-0)=0+k$$

$$k=-\ln(E)$$

l'équation devient :

$$\begin{aligned}
-\ln(E-u) &= \frac{t}{\mathrm{RC}} - \ln(E) \\
\ln(E) - \ln(E-u) &= \frac{t}{\mathrm{RC}} \\
\ln(\frac{E}{E-u}) &= \frac{t}{\mathrm{RC}} \\
\frac{E}{E-u} &= e^{\frac{t}{\mathrm{RC}}} \\
\frac{E-u}{E} &= e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \\
1 - \frac{u}{E} &= e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \\
\frac{u}{E} &= 1 - e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}} \\
u &= E(1 - e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}})
\end{aligned}$$

Nous trouvons le même résultat, comme c'est bizarre !

Nous étudierons une application pratique : L'oscillateur à NE555