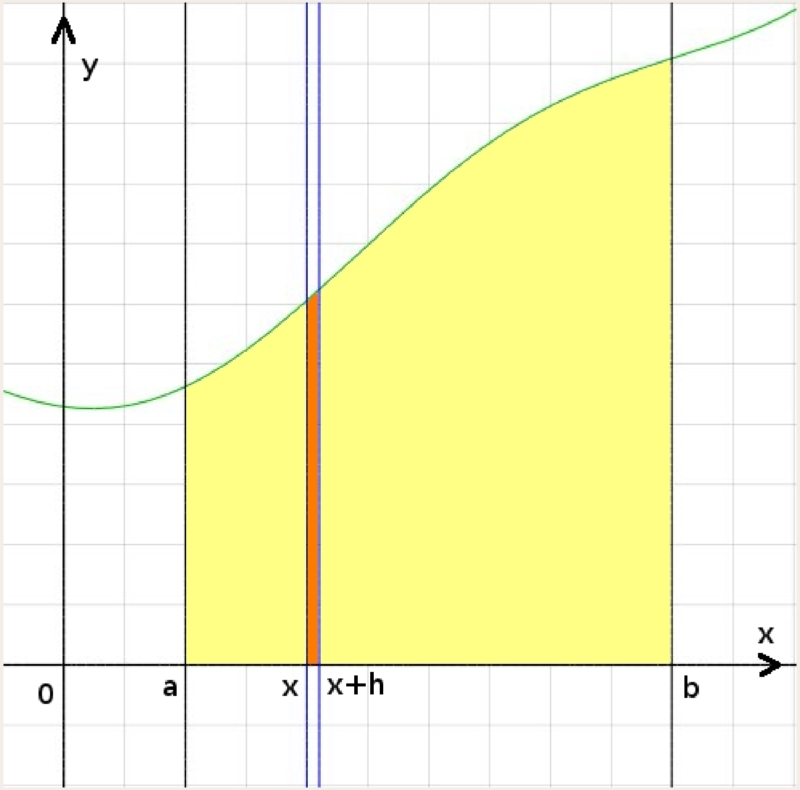
Intégration

1 Intégrale définie

Je vous propose une approche intuitive de la notion d'intrégration et du lien entre fonction primitive et fonction dérivée, sous forme graphique.



Soit donc dans un repère cartésien orthonormé la courbe représentative d'une fonction $f(x)$ presque quelconque, plus précisément d'une fonction de la variable x, définie et continue entre les valeurs $x_1 = a$ et $x_2 = b$

Considérons la surface S_a^b (en jaune) située sous la fonction, c'est à dire l'espace délimité par la courbe représentative de cette fonction, l'axe des abscisses et les droites parallèles à l'axe des ordonnées délimitant l'intervalle des x compris entre a et b .

Cette surface peut être découpée en fines tranches verticales de surface ds comprises entre les valeurs de x et $x+h$

considérons une de ces tranches (en orange) :

lorsque h **tend** vers 0 nous écrirons $h=dx$

Lorsque la largeur h de la tranche tend vers 0, c'est à dire lorsque $x + h$ tend vers x alors $f(x+h)$ tend vers $f(x)$ puisque la fonction est continue, et la surface ds tend vers 0 certes, mais plus précisément vers un rectangle d'aire $dx \times f(x)$

Nous pouvons écrire:

$$ds \;=\; f(x)\,.dx$$

La valeur de la surface S_a^b est la somme de toutes ces minces tranches juxtaposées comprises entre a et b

Si les tranches ont une largeur non nulle et sont en nombre limité, nous pouvons écrire:

$$\mathrm{S_a^b} \;=\; \sum_{a}^{b} h \times f(x)$$

Pour une fonction « en escalier » (succession de segments horizontaux) ce calcul peut convenir. Mais pour une fonction continue d'une variable réelle, ce n'est plus le cas. Il faut pousser le raisonnement à sa limite :

Lorsque nous faisons tendre la largeur h des tranches vers 0, leur nombre tend vers l'infini, ce qui ne change pas leur somme qui vaut toujours S, mais la précision augmente d'autant plus que nous approchons de cette limite (les « haut » des tranches s'approchent de plus en plus d'un segment horizontal, donc la forme des tranches s'approche de plus en plus du rectangle de surface $dx \times f(x)$). Nous utiliserons alors une **nouvelle notation**, celle de l'intégrale définie :

$$S_a^b = \int_a^b f(x).dx$$

Remarque : S_a^b n'est pas une fonction mais un nombre.

2 Intégrale indéfinie et fonction primitive

Considérons maintenant une valeur arbitraire « c » de la variable x située à gauche de a et définissons une fonction $S(x) = S_c^x$ de la variable x , qui donne la valeur de la surface sous la courbe pour toute valeur de x depuis $x = c$

$$S(x) = \int_c^x f(x).dx$$

De même:

$$\begin{aligned} S(x+dx) &= \int_c^{x+dx} f(x+dx).dx \\ &= \int_c^{x} f(x).dx + \int_x^{x+dx} f(x).dx \\ &= S(x) + f(x).dx \end{aligned}$$

En effet, le deuxième terme de cette avant dernière ligne, soit $\int_x^{x+dx} f(x).dx$ n'étant qu'une « tranche unique » de surface entre x et $x+dx$...

Donc:

$$\begin{aligned} f(x).dx &= S(x+dx) - S(x) \\ f(x) &= \frac{S(x+dx)-S(x)}{dx} \end{aligned}$$

La fonction $f(x)$ est la fonction dérivée de la fonction $S(x)$, et réciproquement la fonction $S(x)$ telle que nous l'avons définie plus haut est une **primitive** de $f(x)$ (primitive au sens justement que la dérivée donne la fonction). C'est *une* primitive au même titre que toutes les fonctions $S(x)+k$ (le terme k s'annulant lors de la dérivation).

Remarquons maintenant que la fonction

$$S_2(x) \;=\; \int_d^x f(x).dx$$

est également une primitive de $f(x)$ et n'en diffère donc que d'un terme k

$$S_2(x) \;=\; \int_d^c f(x).dx + \int_c^x f(x).dx$$

$$\;=\; \int_d^c f(x).dx + S(x)$$

Nous en déduisons que

$$k \;=\; \int_d^c f(x).dx$$

Il devient ainsi inutile de préciser le point c (ou d ou autre...) pris comme origine des x pour obtenir ces primitives, et on définira l'ensemble des fonctions primitives de f avec la notation :

$$\int f(x).\mathrm{dx}$$

Cette ensemble de fonctions primitives (on dit aussi « classe d'équivalence » des primitives) d'une fonction est aussi appelée *intrégrale indéfinie* de f.

1 Calcule de l'intégrale définie à partir de l'intégrale indéfinie

soit donc une fonction $f(x)$ et son intégrale indéfinie :

$$F(x) = \int f(x).\mathrm{dx}$$

Soit une de ces primitives :

$$F_1(x) = \int_c^x f(x).dx$$

Nous avons :

$$F_1(a) = \int_c^a f(x).dx$$

$$F_1(b) = \int_c^b f(x).dx$$

$$\begin{aligned} F_1(b) - F_1(a) &= \int_c^b f(x).dx - \int_c^a f(x).dx \\ &= \int_a^b f(x).dx \end{aligned}$$

Ce dernier résultat se déduit directement du graphique représentant les surfaces.

C'est un résultat très important qui montre que pour obtenir la valeur de l'intégrale définie entre deux points, il faut calculer la différence des valeurs que prend une primitive (n'importe laquelle) de cette fonction en ces points.

2 Exemple :

Calculons la valeur de l'intégrale définie :

$$s = \int_3^8 (6x+1)\,.dx$$

La fonction $f = 6x+1$ admet comme primitive $F = 3x^2 + x + k$

il vient:

$$\begin{aligned} s &= F(8) - F(3) \\ &= (3\times 8^2 + 8 + 1) - (3\times 3^2 + 3 + 1) \\ &= 192 + 8 + 1 - (27 + 3 + 1) \\ &= 201 - 31 \\ &= 170 \end{aligned}$$

si toutefois je ne suis pas trompé !

On voit au passage que le terme k s'annulle, et donc que n'importe quelle primitive de la fonction f fait l'affaire.

C'est pratique pour calculer des surfaces, mais pas seulement, des volumes aussi, des distances parcourues en chute libre, et... des intégrales de Fourier d'un signal périodique et autres transformées de Laplace.

Nous verrons cela prochainement.