Dérivée de la fonction exponentielle

Avant de calculer cette fonction dérivée, nous devons démontrer une chose qui nous sera très utile :

1 Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction

1.1 définition de la fonction réciproque d'une fonction $\boldsymbol{f}$, notée $\boldsymbol{f^{-1}}$

soit $y = f(x)$ alors $x = f^{-1}$(y)

conséquence: $f^{-1}(f(x)) = x$

1.2 Calculons de la dérivée de $\boldsymbol{f^{-1}}$:

$f^{-1}(f(x)) = x$ peut s'écrire $f^{-1} \circ f(x) = x$

$f^{-1} \circ f$ est une fonction composée. On sait calculer sa dérivée (voir page sur les dérivées)

$(f^{-1} \circ f)'(x) = f^{-1\prime}(f(x)) \times f'(x)$

Attention à ne pas confondre les -1 (réciproques) avec les apostrophes (dérivées) !

$$(f^{-1} \circ f)(x) \;=\; x$$

dérivons les deux membres, sachant que x'=1

$$f^{-1\prime}(f(x)) \times f'(x) \ = \ 1$$

nous obtenons le résultat:

$$f^{-1\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Théorème.

La dérivée de la fonction réciproque est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction.

Remarque.

Graphiquement la dérivée en un point de la fonction représente la pente de la courbe représentative de la fonction en ce point. Pour obtenir la fonction réciproque il faut permutter les axes x et y. Il est alors intutif de voir que la pente au même point de la courbe devienne l'inverse de la pente de départ.

2 rappel : dérivée de la fonction logarithme népérien

$$y = f(x) = \ln(x)$$

$y' = f'(x) = \frac{1}{x}$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

3 Dérivée de la fonction exponentielle de base e

$f(x) = y = e^x \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y) = \ln(y)$

dérivons sachant que la dérivée de la fonction réciproque est égale à l'inverse de la dérivée de la fonction :

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \frac{1}{[\ln(y)]'} \\ &= \frac{1}{1/y} \\ &= y \\ &= e^x \end{aligned}$$

Théorème.

La fonction exponentielle est sa propre dérivée.

$$(e^x)' = e^x$$

4 Dérivée de e^{ax}

e^{ax} est une fonction composée. Appliquons les règle de dérivation des fonctions composées :

4.1 Rappel :

$[g(u(x))]' = g'(u'x) \times u'(x)$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}(e^{ax})' &= e^{ax} \times (ax)' \\ &= a\,e^{ax}\end{aligned}$$

Où l'on voit que des fonctions découlant de concepts plutôt compliqués se comportent très simplement !

Ces fonctions sont primordiales dans le domaine de l'analyse mathématique, en particulier pour la résolution des équations différentielles, qui sont au centre de la plupart des phénomènes physiques (plus précisément de leurs modèles) et donc bien sûr de l'électronique. Nous allons étudier ça, mais auparavant nous allons faire un petit détour par l'Intégration.