Dérivée des fonctions trigonométriques

1 Rappel de quelques limites

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

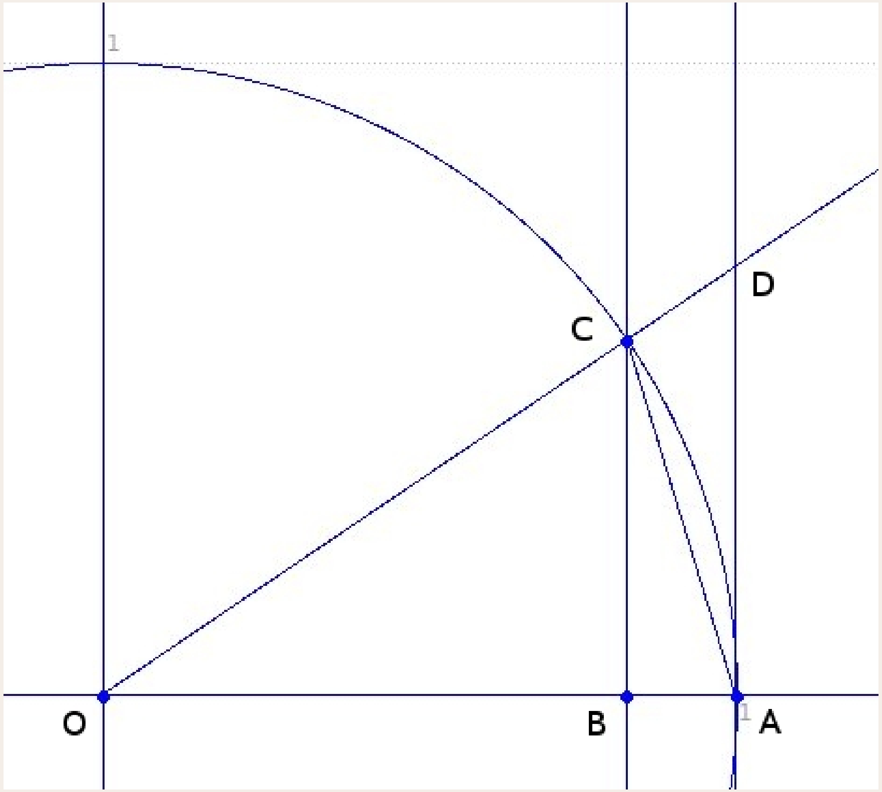
$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

Si ces deux limites sont évidentes, il n'en est pas de même de :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Puisque $\sin(x)$ et x tentent toutes deux vers 0, leur quotient direct est indéterminé.

On peut toutefois calculer cette limite par la méthode géométrique dite « des aires ».



Sur cette figure représentant le cercle trigonométrique de rayon unité, nous avons :

- $\mathrm{OA} = 1$
- $\mathrm{OB} = \cos(x)$
- $\mathrm{BC} = \sin(x)$
- $\mathrm{AD} = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\text{longueur de } l'\text{arc de cercle } \mathrm{AC} = x$

Le triangle OAC a comme aire :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{BC}}{2} \\ &= \frac{1 \times \sin(x)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(x)}{2}$$

Le secteur circulaire OAC (délimité par les rayons OA et OC et l'arc (courbe) AC) a comme aire :

$$S_2 = \frac{1 \times x}{2}$$

$$= \frac{x}{2}$$

Le triangle OAD a comme aire:

$$S_3 = \frac{\text{OA} \times \text{AD}}{2}$$

$$= \frac{1 \times \text{tg}(x)}{2}$$

Nous voyons que quel que soit l'angle x compris entre 0 et pi/2 (90 degrés), l'aire S_2 du secteur circulaire est TOUJOURS plus grande que celle S_1 du petit triangle, tout en étant TOUJOURS plus petite que celle S_3 du grand triangle.

On peut donc écrire l'inégalité suivante (on appelle cela un encadrement) :

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{2}$$

$$\sin(x) < x < \mathrm{tg}(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{\sin(x)} < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\mathrm{tg}(x)}{\sin(x)}$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Or nous savons que

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

et donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

Lorsque $x \to 0$ nous voyons que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)}$$

se trouve encadrée entre 1 et 1.

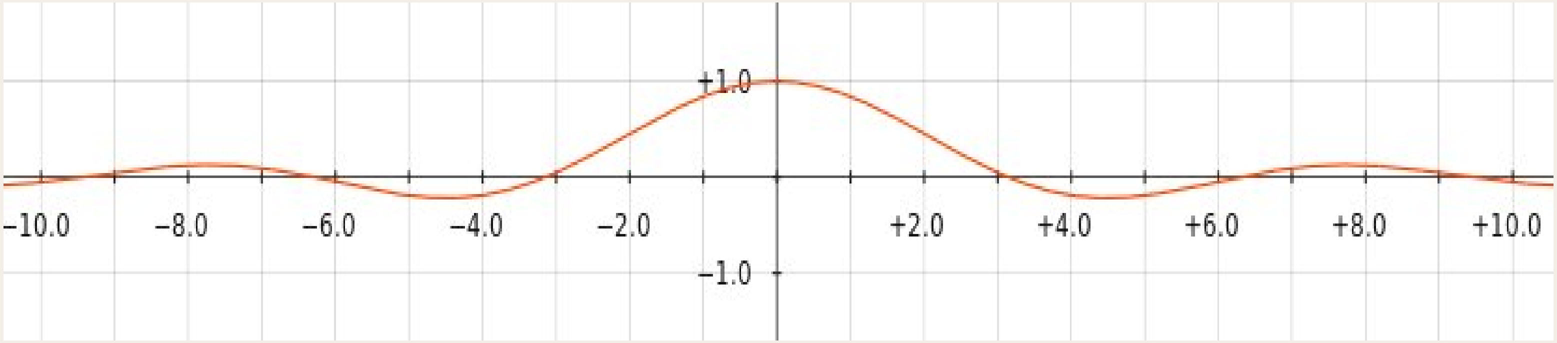
Nous en déduisons bien volontier que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

et en prenant l'inverse :

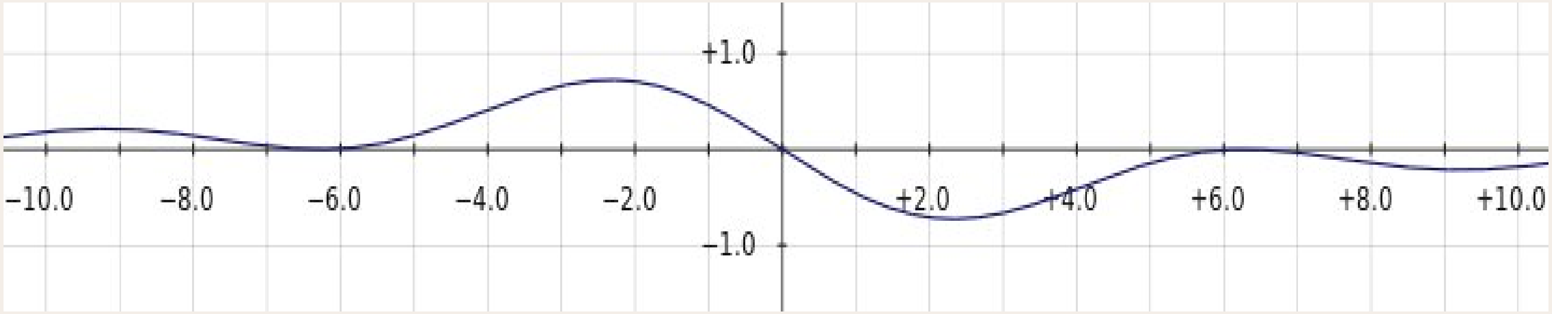
$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

On peut aussi s'en convaicre (mais ce n'est pas une démonstration) en traçant ces fonctions avec le logiciel libre Kig :



De même on démontre que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$



Arrivés à ce stade nous disposons des outils permettant de calculer les dérivées des fonctions trigonométriques

2 Dérivée des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$

$$\begin{aligned}
[\sin x]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\left(\cos(h)-1\right)+\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}
\end{aligned}$$

$$= \sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1$$

$$= \cos x$$

De même on démontre que :

$$[\cos x]' = -\sin x$$

Voici sur le même graphique, les fonctions sin(x) et cos(x)

Chaque courbe représente la valeur de la pente de l'autre (pour un même x donné), ce qui confirme le résultat précédent.